# SONLU VE SONSUZ SAYILAR

DAN PEODE

Matematikçiler, çok büyük sayıları düşünmekten hiç korkmazlar, fakat herhangi büyük bir sayı, ne kadar büyük olursa olsun belirlidir ve sonludur. Örneğin dünya üzerindeki insan nüfusu milyarlarca mertebededir ve sayılabilir, şu halde sonlu sayıdadır. Bir plajdaki ince kum taneciklerinin sayısı ne kadar fazla olursa olsun, yine de sayılabilir, yani sonludur, bir buğday tarlasındaki başaklar sonlu sayıdadır, hattâ başaklardaki tanecikler de sonlu sayıdadır. Ancak, tabii sayılar dediğimiz ve 1, 2, 3, 4, 5 .............. ile gösterdiğimiz sayılar, sonsuza kadar uzanırlar, çünkü ne kadar büyük sayılara erişirsek erişelim, yine de saydığımızdan daha büyük bir sayı bulabiliriz. Diyelim ki, (N), saydığımız en büyük tabii sayıyı göstersin. $(N + 1)$ ise, (N) den bir fazla sayı olduğundan, en büyük sayıdan da büyük bir sayı mutlaka var olacaktır. Buna göre, tam ve tabii sayılar sonsuza kadar uzar gider diyebiliriz.

Diğer bir sonsuzluk sınıfı, tabii sayıların kareleri olan sınıftır, örneğin:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ..............

sayıları da sonsuza kadar uzandığından, tabii sayıların kareleri olan sayıların ait olduğu sınıf ta sonsuzdur. Çünkü, $(n^2)$ gibi bir sayıya erişsek dahi, bu sayıda duramayız, zira $(n + 1)^2$, (n) den bir fazla olan sayının karesi olacaktır.

Buraya kadar verdiğimiz izahattan anlıyoruz ki, iki tane sonsuz sınıf var. Biri, tam ve tabii sayılar sınıfı. Öteki, bu sayıların kareleri olan yine tam ve tabii sayılar sınıfı.. Acaba, hangi sınıf daha büyük?

«Hangi sınıf daha büyük» derken, hangisi daha fazla ve büyük sayıları kapsamına alıyor demek istiyoruz.

Önce şunu söyleyebiliriz ki, ikinci sınıftaki sayıların hepsi, birinci sınıfta da vardır. Çünkü $(n^2)$ tabii bir sayı olduğundan $(n^2)$ nin birinci sınıfta da mevcut olması gerekir. Öte yandan birinci sınıfta mevcut bir çok sayılar ikinci sınıfta mevcut değildir. Meselâ tam kare olmayan 3, 5, 7, 21, 22, 23 .................. vs. gibi sayıları ikinci sınıfta göremeyiz. Buna göre acaba, her iki sınıfta da sonsuz sayılar olmasına rağmen, birinci sınıftaki sayıların ikinci sınıftaki sayılara nazaran daha fazla olduğunu söyleyemez miyiz? Başka bir deyişle birinci sınıf, ikinci sınıfa nazaran «daha fazla fazla sonsuzdur» diyemez miyiz?

Bu problem çok eskidir. Gallile, «Diolog» adlı eserinde bu probleme değinmiş ve eşitlik ya da eşitsizliklerin yalnız sayılabilen sonlu sayılar için uygulanabileceğini belirtmişti. Gallile'ye göre, eğer iki sınıf ta sonsuz ise, birinin öbürüne nazaran «daha büyük sonsuz» olması düşünülemez, zira böyle bir mukayese yapmak imkânsızdır.

1873 yılında Alman matematikçilerinden Canter, sonsuzluk kavramı üzerinde çalışırken bu probleme bir başka yönden yaklaşmayı denedi. Şöyle ki:

Eğer, herhagni sonlu bir sınıf içinde 21 adet «var» dersek, bundan çıkaracağımız anlam bir, iki, üç, dört, .............. yirmi, yirmi bir sayısının ifade ettiği kadar büyüklük olacaktır. Yani, her bir nesneye (eşyaya) bir sayı verilirse, yirmibir sayısı da nesne sayısının yirmibir adet olduğunu göstermiş olacaktır. Bu matematik dilinde bire bir tekabül demektir.

Bire bir tekabül için bir diğer örnek verelim. Diyelim ki, bir odada 21 sandalye vardır. Eğer odaya girdiğimde 21 sandalyenin de dolu olduğunu görürsem, 21 kişinin bu odada mevcut olduğunu anlarım. Eğer bazı sandalyeler boş ve sahipsiz ise, kişi sayısının 21 den az olduğunu, sandalyeler dolu ve bir kaç kişinin de ayakta kaldığını görürsem, 21 den fazla kişinin bu odada mevcut bulunduğunu anlamış olurum. İşte bu örnekte sandalyelerle kişiler arasında bire bir tekabül vardır. Eğer sandalyeler, kişilerden fazla görünüyorsa, sandalye sayısı kişi sayısından daha büyük çıkacaktır. Eğer sandalyeler dolu, kişiler ayakta ise, kişi sayısı, sandalye sayısından daha fazla olacaktır.

Bütün bunlar açık, belirli ve kolay kavramlar olmasına rağmen, aslında Cantor'un düşüncesine benzemektedir. Şöyle ki:

Eğer iki sonsuz sınıfın sayıları —ya da üyeleri, elemanları diyelim— arasında bire bir tekabül varsa, bu taktirde iki sonsuz sınıf birbirine eşittir diyebiliriz. Matematiksel olarak bir M sınıfı, diğer bir N sınıfına eşitse, $M \sim N$ yazılabilir. Bu, M ile N arasında bire bir tekabülün mevcut olduğunu gösterir. Diğer yandan U bir başka sınıfsa, ve U ile N arasında bire bir tekabül varsa bu taktirde $N \sim U$ yazılabilir. Bu ise ayni zamanda, $M \sim U$ demektir..

Şimdi tekrar sayılarımıza dönelim, ve sonsuz sayıdaki tabii sayılar sınıfını (cümlesini) ele alalım:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ..............

Bire bir tekabül için tabii sayılar sınıfı ile, tabii sayıların kareleri olan diğer bir sınıfı düşünelim:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 ..............

Birinci sınıftaki (n) sayısının, ikinci sınıftaki ($n^2$)) sayısına tekabül etmesi için:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ........... | n | ...... |
| 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | ........... | $n^2$ | ...... |

şeklinde yazılması gerekir. Tabiidir ki, her sayı için ayrı ayrı bire bir tekabülü göstermeğe lüzum yoktur, fakat gidiş yolu bu olacaktır.

Şimdi de çift sayılar cümlesi ile tabii sayılar cümlesini ele alalım ve bire bir tekabülün varlığını görelim:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ........... | n | ...... |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | ........... | 2n | ...... |

Ayni şekilde tek sayılar cümlesi ile, tabii sayılar cümlesini göz önüne alalım:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ........... | n | ...... |
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | ........... | 2n-1 | ...... |

Görülüyor ki, burada da bire bir tekabül şartı sağlanmıştır.

Bu üç misâli de gördükten sonra, şimdi diğer bir misâle geçelim. Cantor'un yaptığı gibi, sonsuz sayıda bir sınıf düşünelim. (p) ve (q) tam sayı olduğuna göre, p/q sayılabilir, yani p/q sınıfı ile tam sayılar sınıfı arasında bire bir tekabül vardır.

Pozitif kesirli sayılar, sayılabilir sayıda elemanlara sahip sınıflar içinde düşünülebilir. Örneğin (0) ile (1) arasındaki kesirli sayılar cümlesini:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{n}{(n+1)} \ldots\ldots$$

şeklinde yazabiliriz. Öte yandan ayni şekilde (0) ile ($\frac{1}{2}$) arasındaki sayıları da:

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{n}{(2n+1)} \ldots\ldots$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Şimdi Cantor'un yaptığı şekilde aşağıdaki gibi bir liste hazırlayalım:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{8}$ | ......... |
| $\frac{2}{1}$ | $\frac{2}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $\left(\frac{2}{4}\right)$ | $\frac{2}{5}$ | $\left(\frac{2}{6}\right)$ | $\frac{2}{7}$ | $\left(\frac{2}{8}\right)$ | ......... |
| $\frac{3}{1}$ | $\frac{3}{2}$ | $\left(\frac{3}{3}\right)$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{5}$ | $\left(\frac{3}{6}\right)$ | $\frac{3}{7}$ | $\frac{3}{8}$ | ......... |
| $\frac{4}{1}$ | $\left(\frac{4}{2}\right)$ | $\frac{4}{3}$ | $\left(\frac{4}{4}\right)$ | $\frac{4}{5}$ | $\left(\frac{4}{6}\right)$ | $\frac{4}{7}$ | $\left(\frac{4}{8}\right)$ | ......... |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{5}{1}$ | $\frac{5}{2}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{5}{4}$ | $\left(\frac{5}{5}\right)$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{5}{7}$ | $\frac{5}{8}$ | ......... |
| $\frac{6}{1}$ | $\left(\frac{6}{2}\right)$ | $\left(\frac{6}{3}\right)$ | $\left(\frac{6}{4}\right)$ | $\frac{6}{5}$ | $\left(\frac{6}{6}\right)$ | $\frac{6}{7}$ | $\left(\frac{6}{8}\right)$ | ......... |
| $\frac{7}{1}$ | $\frac{7}{2}$ | $\frac{7}{3}$ | $\frac{7}{4}$ | $\frac{7}{5}$ | $\frac{7}{6}$ | $\left(\frac{7}{7}\right)$ | $\frac{7}{8}$ | ......... |
| $\frac{8}{1}$ | $\frac{8}{2}$ | $\frac{8}{3}$ | $\frac{8}{4}$ | $\frac{8}{5}$ | $\frac{8}{6}$ | $\frac{8}{7}$ | $\frac{8}{8}$ | ......... |
| $\frac{9}{1}$ | $\frac{9}{2}$ | $\frac{9}{3}$ | $\frac{9}{4}$ | $\frac{9}{5}$ | $\frac{9}{6}$ | $\frac{9}{7}$ | $\frac{9}{8}$ | ......... |
| $\frac{10}{1}$ | $\frac{10}{2}$ | $\frac{10}{3}$ | $\frac{10}{4}$ | $\frac{10}{5}$ | $\frac{10}{6}$ | $\frac{10}{7}$ | $\frac{10}{8}$ | ......... |
| $\frac{11}{1}$ | $\frac{11}{2}$ | $\frac{11}{3}$ | $\frac{11}{4}$ | $\frac{11}{5}$ | $\frac{11}{6}$ | $\frac{11}{7}$ | $\frac{11}{8}$ | ......... |

Listeyi incelediğimizde bütün sayıların kesirli olduğunu görürüz. Birinci sıradaki sayıların veya kesirlerin payında yalnız (1) rakkamı vardır, paydalarında ise, 1, 2, 3, 4, 5, .............. rakkamları mevcuttur. Listenin 2. sırasında, pay'da (2), payda'da 1, 2, 3, 4, 5, .............. 3. sırada payda (3), payda'da 1, 2, 3, 4, 5, .............. vs. (n) inci sıradaki kesrin payı (n), paydası da yine 1, 2, 3, 4, 5, 6, .............. olacaktır.

Yukardaki listede, parentez içindeki kesirler sadeleştiğinde daha önceki sıralarda mevcut kesirler elde edilecektir. Örneğin ikinci sırada,

$$\left(\frac{2}{4}\right) = \frac{1}{2}, \left(\frac{2}{6}\right) = \frac{1}{3}, \left(\frac{2}{8}\right) = \frac{1}{4}$$

daha önceki sırada (1. sırada) esasen mevcut kesirlerdir. Eğer bu özel kesirler hesaba katılmazsa, ok yönünde takip edilecek bir sayma işlemi aşağıdaki sonucu verir:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | ......... |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | ......... |
| — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | ......... |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |

Buradan tabii sayılarla kesirli sayıların arasında bire bir tekabül olduğunu anlıyoruz. Böylece bütün pozitif kesirli sayıların, sayılamıyacağı neticesine varılmış oluyor.

*Çeviren: TAŞKIN TUNA*