Sayılar Alemine Bir Seyahat...

Şahin Koçak
Anadolu Üniversitesi

Sayı Nedir?

Bana hayatımda birkaç defa sayı nedir sorusu yöneltildi ve her defasında bu soruyu cevaplamak için düşünürken yüzümden ter boşandığını hatırlıyorum. Neredeyse sorulmaya değmeyecek kadar basit görünen bu soru insanın kafasını allak bullak ediyor.

Günlük yaşamda büyük bir rahatlık ve emniyetle kullandığımız ve herkesin kesinlik simgesi olarak gördüğü sayılar, doğru dürüst tanımlamağa kalktığımızda, içinden çıkılmaz bir muammaya dönüşüyor.

Yıllar önce benden Açıköğretim Fakültesi'nin ilkokul öğretmenleri için hazırladığı bir programla ilgili olarak sayı kavramı üzerine bir yazı istenmişti (elinizdeki yazı esas itibarıyla bu yazıdır). Yazıya nerden başlayıp, ne yazacağımı kestiremiyordum.

Sayı kavramının kendi zihnimde nasıl oluşmuş olabileceğini yoklamak için çocukluk günlerime doğru daldım. Masalların sonunda gökten üç elma düşüyordu; yedi cüceler, kırk haramiler vardı. Sonra bir yerlerde elmalar, cüceler, haramiler kayboluyor, sanki tasavvufun soyutluğunu simgelercesine geriye üçler, yediler, kırklar kalıyordu. Bu transformasyon nasıl gerçekleşiyordu?

Üç Elmayı Anladım, Ama Üç Nedir?

Biraz düşündükten sonra, bu kavramın konuşma dilindeki yorumu belki sağduyuma yol gösterebilir ümidiyle Türk Dil Kurumu'nun bir sözlüğüne uzandım. Sözlükte "üç" kavramının karşısındaki açıklamayı görünce hayretler içinde kaldım. Çok masum ve kestirme bir biçimde,

üç = ikiden bir artık

tanımı veriliyordu. Sözlük yazarlarımız acaba ancak geçen yüzyıl sonunda netleşen ve Peano aksiyomları denilen yönteme vakıf mı idiler, yoksa güçlü bir sezgileri mi vardı? Bunu hâlâ anlamış değilim. Ama bir kere bu anlayışı benimsedikten sonra gerisi çorap söküğü gibi geliyor:

dört = üçten bir artık,
beş = dörtten bir artık, vs.

Buna göre, geriye sadece "bir"in hesabını vermek kalıyordu. Heyecanla bu maddeye baktığımda biraz düş kırıklığına uğradım: sırasıyla,

bir = sayı sıfatlarının ilki,
ilk = birinci,
birinci = bir sayısının sıfatı

olarak tanımlanıyordu. Bu fasit daire canımı sıkmakla birlikte, sözlük yazarlarımıza fazla kızmadım, çünkü Peano bile aksiyomlarının arkasına saklanıp, "bir" in mahiyeti hakkında daha aydınlatıcı bir açıklama yapmıyordu.

Sözlüğü kapattım (Sondan bir evvelki cümlede ikinci bir "bir" kullandığımı yazdıktan sonra farkettim!).

Başka Bir Çıkmaz Sokak

Aslında sözlüğü açtığımda şuna benzer bir tanım bekliyordum:

üç = üç elma, üç kitap vs. gibi toplulukların ortak özelliği

Sanırım doğal sayılar üzerinde biraz düşünenin aklına ilk gelen tanım bu olacaktır. Herhalde doğal sayı kavramının evrimsel oluşumu da böyle olsa gerekir. Ancak bu tanıma biraz eleştirel açıdan yaklaşacak olursak, böyle toplulukların birden fazla "ortak özelliği" olup olmadığı sorusu akla gelebilir. Ortak özellikleri azaltmak için, örnek topluluk sayısı çoğaltılsa bile, atomlardan oluşmak gibi özellikler içimize şüphe sokmaktadır.

Bu tanımı kurtarmak için şöyle bir manevraya başvurulmuştur: "Ortak özellik" lafından vazgeçelim ve "üç" kavramını, üç elma, üç kitap, üç kalem vs. gibi düşünülebilecek bütün toplulukların topluluğu olarak tanımlayalım! Fakat ne yazık ki, (bu kitap mı, kitap değil mi gibi sorular bir yana) bu son topluluk bir "topluluk" olamayacak kadar kalabalıktır! (Bu konuya tekrar döneceğiz.)

Bazılarımızın aklına bu yaklaşımın da zaten bir kısır döngü olduğu gelebilir: "üç"ü tanımlamak için, "üç elma", "üç kitap" örneklerinin bünyesinde gene "üç"ü kullanıyoruz. Ancak bu, kümelerin bire-bir eşlenmesi yardımıyla kolay giderilebilecek bir çelişkidir.

Üç elemanlı diye düşündüğümüz herhangi bir özel kümeyi gözümüze kestirip, sonra onunla bire-bir eşlenebilen bütün kümeleri göz önüne alabiliriz. Fakat bu hile, yukarıdaki manevranın sıkıntısını halletmemektedir. İsterseniz işler daha fazla karışmadan bu tanım işinden vazgeçelim. Veya karşı saldırıya geçelim:

Tanımlamak Ne Demek?

(Lütfen "ne demek", ne demek demeyin!)

Bizden bir tanım isteyenin, tanımdan ne anladığını belirtmesi gerekir. Tanımlamanın ne demek olduğunu tanımlamak gibi belalı bir işle başımızı fazla derde sokmadan, uysal bir tanım tanımı da verebiliriz: herhalde tanımlama olayını, "daha az bilineni" "daha çok bilinene" indirgeme işi olarak düşünmek anlamlı olsa gerektir.

Ancak bu indirgeme işi ilelebet süremeyeceğine göre, demek ki bir yerlerden başlamak zorundayız. Aslında insanın nereden başlayacağı, nerede durduğu ile alakalıdır. Sıfırdan başlamak iddiasında olan bir kişi bile, milyonlarca yıllık evrimin kendisine bahşettiği korkunç yeteneklerle yola çıkmaktadır. Örneğin aşağıdaki işaretlerin aynı harfi gösterdiğini hepimiz bir bakışta anlıyor, fakat bunu temin eden biyolojik mekanizma hakkında fikir yürütme gereğini dahi duymuyoruz.

M m **m** **M** M *m* **M** M *M* m

Alışkın olduğumuza, rahat kullanabildiğimize o kadar normal ve doğal gözüyle bakıyoruz ki, ancak işler ters gidince düşünmeye başlıyoruz.

İşler İlk Defa Ne Zaman Ters Gitti?

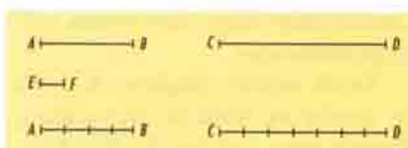
Ben birçok hayvanın küçük doğal sayılar hakkında bir fikri olduğundan kuşku duymuyorum. 100 bin sene önceki insanların sayı kavramının ne kadar netleştiği ve zenginleştiği konusunda ise net bir fikrim yok. Fakat bundan birkaç bin sene önce doğal sayılar ve (pozitif) rasyonel sayılar bugünküne yakın bir mükemmelliğe ulaşmışlardı.

Ancak Milattan birkaç yüzyıl önce insanlar tarafından yapılan bir "keşif" zihinleri derinden sarsmış ve ancak 2000 yıl sonra muhtemelen geçici (!) bir çözüme kavuşturulabilmiştir.

Akla Uygun Olmayan Sayılar

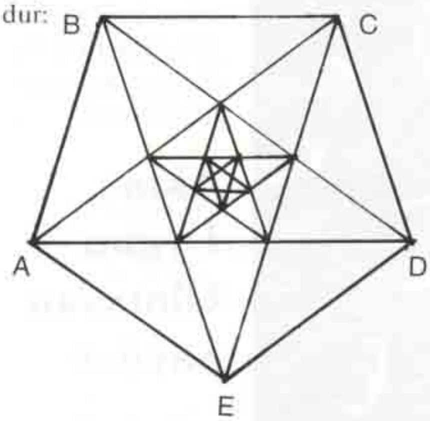
Bu keşfi nakletmek için, önce, şimdi "Eski Yunanlılar" denilen insanların rasyonel sayı anlayışına kısaca değinelim. O kavim arasında şekiller, sayılardan daha çok rağbet görmekte idi ve bir rasyonel sayı, "ortak ölçülü" iki doğru parçasının uzunluklarının oranı olarak düşünülüyordu. Aslında rasyonel sayı kavramından ziyade, ortak ölçülülük kavramı ön planda idi. Bundan şu anlaşılıyordu:

AB ve CD gibi iki doğru parçasının ortak ölçülü olmaları demek, bunların, aşağıda gösterilen şekilde, EF gibi bir başka doğru parçasının belli tam katları uzunluğundan olmaları demekti.



Önceleri herhangi iki doğru parçasının ortak ölçülü olacakları düşünüldü. Bunu biz bile şimdi hâlâ düşünebiliriz. EF'nin gittikçe daha küçük seçilmesinin buna imkan vereceğini beklemek doğaldır. Bu aslında "atomistik prensiplere" de çok uygun düşen bir düşüncedir. Fakat o zamanlar çok gelişmiş olan düzlem geometrinin prensipleri doğru kabul edilecek olursa, bu düşüncenin, "maalesef" doğru olamayacağının farkına varıldı.

Olayın ayrıntısı bilinmemekle birlikte, üzerinde bu keşfin yapılmış olması muhtemel bir şekil şudur:



ABCDE düzgün beşgeninin AB kenarı ile AC köşegeninin ortak ölçülü olmadığını keşfetmeğe çalışmak, umarım sizin için de zevkli olacaktır. Bu amaçla, şu yol-gösterme işinize yarayabilir: AB'nin uzunluğunu, AC'nin uzunluğundan çıkartın; sonra, çıkan farkı AB'nin uzunluğundan çıkartın; sonra, çıkan farkı, önceki farktan çıkartın ve böyle devam edin. Bu işlemin hiçbir zaman durmayacağını göreceksiniz.

Yürümeyi Şaşıran Kırkayak

Antik çağ matematikçilerinin dünyasını yıkan bu keşif, sayıların sanıldığı kadar "masum" olmadıklarını göstermiş ve matematikçileri, kullandıkları kavramlara dair, kendilerine karşı daha ciddi hesap vermeğe zorlamıştır.

Ancak sadece düşünmek, belli bir zemin ve birikim oluşmadan, çözüme yetmemektedir. Nitekim, rasyonel olmayan sayıların mahiyeti hakkında tatminkar bir fikre, ancak 19. yüzyıl sonunda ulaşılabilmiştir. Bu problem daha yeni çözülmüş gibi görünürken, matematik gibi en kesin zannedilen bilim, kendisini bu yüzyıl başında çok daha vahim bir krizin içinde bulmuştur. Ayrıntısına bu çerçevede inemeyeceğimiz (fakat, daha önce bahsi geçen "fazla kalabalık topluluklar"la da alakalı olan ve başka yönlerine de ileride tekrar kısaca değineceğimiz) bu kriz matematiğin temellerine dair sorulardan kaynaklanmaktadır ve öyle anlaşılmaktadır ki, nasıl yürüdüğü sorulduğunda yürümeyi şaşıran kırkayak gibi, düşüncemizin temellerine dair düşündüğümüzde işler karışmaktadır.

Evrimin Dolambaçlı Yolları

Rasyonel olmayan sayılarla uğraşırken, az kalsın sıfırı ve negatif sayıları unutuyorduk.

Bazen doğal sayılara katılan sıfır sayısı, herhalde doğal sayıların yazılış sistemlerindeki boş hanelerle alakalı olarak ortaya çıkmış olmalı. Bu sayı bana "yokluğun varlığının" simgesi gibi görünüyor (Boş küme ile benzerliği de boşuna değil: boş kümenin eleman sayısı!). Sıfırı bir yana bırakacak olursak, -1, -2, -3, ... gibi negatif tam sayılar aslında rasyonel olmayan sayılardan daha basit kavramlardır. Hatta bunların rasyonel sayılardan bile daha basit oldukları düşünülebilir. Nitekim, birçok kitaplarda doğal sayılardan sonra, ikinci kademe sayılar olarak, tam sayılar ele alınmaktadır. Fakat 3. dereceden polinom köklerinin ilk defa bulunduğu 16. yüzyıl başlarında, sayı dünyasında henüz negatif sayılar yoktu!

Gerçi bugün, doğal sayılar içinde çıkarma işlemini "daima" yapabilmek için negatif sayılara ihtiyaç duyulduğu söylenmektedir ama, bu bana sonradan düşünülmüş bir yakıştırma gibi geliyor. Çünkü binlerce sene hiç kimse küçük sayıdan büyük sayıyı çıkarma ihtiyacını hissetmemiştir. Negatif sayıların yerleşmesi, bir yandan bunların denklem çözümlerinde birçok hal ayrımını gereksiz kılmaları, diğer yandan da analitik geometrinin keşfi ve sayıların noktalarla (ve noktaların sayılarla) temsil edilmesi ile alakalı olsa gerektir. Termometre meselesi herhalde bir gerekçe değil, bir uygulama olmalıdır. Sistem bir kere yerleştikten sonra $x + a = 0$ denkleminin de (a bir doğal ya da tamsayı olmak üzere) her a için çözülür hale gelmesinde şüphesiz bir sakınca yoktur! (Rasyonellerin negatifleri de benzer şekilde problemsiz sayılardır.)

Denklem çözümlerinde kısıtlamalardan kurtulmak, başka bazı hallerde, gerçekten önemli gelişmelerin motoru olmuştur ve "rasyonel olmayan sayılar"dan öteye giden (ve karmaşık sayılar adı verilen) ilk önemli sayı sistemi, varlığını, çözülmesi başka problemler için de önem kazanan ve bir ihtiyaç haline gelen, $x^2 + 1 = 0$ denklemine borçludur. Gariptir ki, daha rasyonel-irrasyonel sayı olayı netleşmeden, bunların bilindiği varsayımı altında, karmaşık sayılar için bugün de aynen kullandığımız bir tanım 19. yüzyıl ortalarında (yani irrasyonel sayı tanımından önce) verilebilmiştir!

Tanım İhtiyacı Acilleşiyor!

Sayı problemine güvenli bir çözüm arayışı belki de sayılardan çok fonksiyonlar tarafından zorlanmıştır. Çünkü 17. ve 18. yüzyılda diferansiyel ve integral hesap büyük bir hızla gelişip yayıldıktan sonra, 19. yüzyılda yığılan bilgileri sağlam bir zemine oturtmak kaçınılmaz hale gelmiştir. Bunun için de sayıların doğrudürüst bir tanımının verilmesi vazgeçilmez bir şart olmuştur. Örneğin bir fonksiyonun sürekliliği kavramı (yani değişkenin "birazcık" değişmesi durumunda fonksiyon değerinin de "birazcık" değişmesi) sayıların yapısı kavranmadan havada kalmaya mahkûmdur.

Tanımdan kaçamayacağımıza göre, artık bu işi ciddiye almamız gerekiyor. Kuşkusuz bir yerlerden başlayacağız.

Ama nereden?

Doğal sayılardan başlamak en makulü görünüyor. Ama rasyonel sayılarla sorunu olmayan, onlardan da başlayabilir. İsteyen daha ileriden de başlayabilir. Veya daha geriden! Belki, "doğal sayılardan da gerisi var mıdır?" diyeceksiniz. Bir dokun bin ah dinle kâse-i fağfurdan!

Yukarıdaki başlama seçeneklerinden birini diğerine tercih etmek için nedenler var mıdır? Belki biraz daha düşünmemiz gerekiyor.

"Bu Şudur" Tanımı ve "Bilmece" Gibi Tanım

Aslında bir yerlerden başlamaya karar vermek de meseleyi henüz çözmemektedir. Başladıktan sonra ne yapacağız? İsterseniz başlama noktasına karar vermeden önce, tanım olayının bir başka yönü üzerinde duralım. Tanım, bir nesneyi açıklamak, detaylandırmak, netleştirmek, kavram oluşturmak gibi "yaratıcı" bir yönünün yanısıra, "mevcutlardan seçme ve bildirme" şeklinde daha düzayak bir mesaj (bilgi, enformasyon) aktarımı niteliği de taşır. "Mevcutlar" çok genişse, "yaratma" ile "seçme" birbirlerine çok yaklaşabilirler ve matematikteki durum buna hayli yakındır. Şimdi geniş bir mevcutlar ailesinden bir seçim yaptığımızı kabul edelim. Acaba neyi seçtiğimizi bir arkadaşa nasıl bildirebiliriz? Bunun, herkesin bildiği iki yolu vardır: Seçilen nesnenin, (varsa) adını söylemek (tabii bunu ikimizin de bildiği varsayımı altında), veya seçilen nesneyi özellikleri ile karakterize etmeye (belirtmeye) çalışmak.

Örneğin, limon diyecek yerde,

küçücük fıçıcık
içi dolu turşucuk

veya, Yunus Emre diyecek yerde,

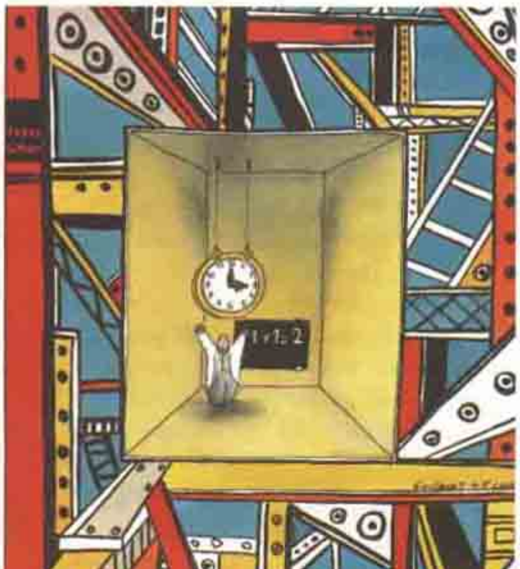
İlim, ilim bilmektir
İlim kendin bilmektir
Sen kendini bilmezsin
Ya nice okumaktır

dizelerinin şairi diyebilirsiniz.

Belki, birinci türden "bildirme"ye "açık bildirme" ya da "açık tanım", ikinci türden bildirmeye, ya da tanımlamaya, "kapalı bildirme", ya da "kapalı tanım" denilebilir.

İsim mi Önemli, Özellik mi?

Bir insanın isminin değil, aklının, yeteneklerinin ve davranışlarının daha önemli olduğunu herhalde herkes kabul edecektir. Bunu bir adım daha ileri götürerek, herhangi bir nesnenin isminin ve görünüşünün değil, özelliklerinin daha önemli olduğunu söyleyebiliriz. Gerçi görünüş de bir özelliktir ama, onun altında yatan daha önemli özelliklerin varlığı, sağduyulu sezginin temel bir kabulüdür. Limonun, dilden dile farkeden adından ve (adından daha objektif) görünüşünden daha önemli olan, dilden dile pek farketmeyen tadıdır. Limonun şekli, tadı ve içeriği yanında çok önemsiz kalmaktadır. Şekli dörtköşe de olsa, hörgüçlü de olsa, kimyevi muhtevası muhafaza edildiği sürece, limon yine aynı işi görecekti (Gerçi "biçim" ve "öz"ün birbirlerini karşılıklı etkilemeleri şeklinde bir olgu da vardır ama, bu



çoğu kez ikincildir). Bu nedenle limonu anlatırken, şeklini geri plana itmeli ve muhtevasını vurgulamalıyız. Bugün artık herkese normal, olağan, basit gelen bu fikir ve anlayış, bütün aklayakınlığına rağmen, matematikte uzun süre tam kavranamamış; özellikle geometride ortaya çıkan ikibin yıllık tartışmalar sonunda netleşmiştir.

İsim ve görünüşten çok özelliklerin önemli olduğu fikri, "aksiyomatik metod" adı altında, artık matematiğin en önemli araçlarından biri haline gelmiştir (Bu aracı, bir diğer ve belki de daha önemli bir yönü nedeniyle, matematiğin amacı olarak görenler dahi vardır. Bu konuya biraz sonra döneceğiz).

Nesne mi Önemli, Münasebet mi? Veya Elma, Portakal Bilinmeden, Ağaç Bilinmeden Limon Bilinir mi?

Şimdilik şu noktaya gelmiş bulunuyoruz: Bir şeyi tanımlamak için bir yerden başlayacağız ve o nesneye özgü özellikleri arayacağız. Ancak hiçbir nesne tek başına var değildir ve bir nesneye ait birçok özellikler, onunla yakın ilişki içinde bulunan başka nesnelere de aittirler ve bazen böyle bir ilişkinin kendisi bile önemli bir özelliktir! Bu nedenle, bir nesneyi kavramak ve tanımlamak için, onun yakın ilişki içinde bulunduğu bir topluluğu (veya toplulukları) tanımlamak daha anlamlı olabilir. Nitekim, tek bir sayı ile uğraşacak yerde, belli bir sayılar topluluğunu, sayılar arası ilişkileri bu topluluğun özellikleri olarak kullanarak, bir çırpıda tanımlamak daha kolay bile olabilir (Daha "ekonomik" olduğuna şüphe yoktur?).

Burada aslında bir nesneyi özellikleri ile tanımlama fikri, doruk noktasına ulaşmaktadır: O nesnenin kendi özellikleri yerine, onun başkaları ile olan ilişkilerini yeni bir nesnenin (topluluğun) özellikleri olarak düşünerek, o topluluğu tanımlamak; böylece, o topluluğun üyesi olan o nesneyi de tanımlamış olmak!

Bu son aşamada, tanımlamak istediğimiz nesneyi bir bakıma gene yitirmiş oluyoruz. O artık bizim için sadece, onu içine kattığımız topluluğun diğer elemanları ile olan ilişkileri ölçüsünde varoluyor. Eğer bir kimse, bu topluluktan bizim nesneyi çıkarsa, onun yerine topluluğun diğer bütün elemanları ile aynı ilişkileri kuran başka bir nesne katsa, biz hiçbir şey farketmeyeceğiz!

Artık Nokta, Nokta Değil!

Bu başlığın biraz abartılmış olduğunu düşünebilirsiniz. Fakat bugün bir geometriciye sorarsanız, onun noktalar hakkında hiçbir tasavvuru olmayabilir veya onun noktaları testi gibi olabilirler. Çünkü onun için noktayı nokta yapan, ikisinden bir doğru geçmesidir. Doğru nedir diyecek olursanız, doğru da artık doğru değildir; doğruyu doğru yapan, iki doğrunun bir noktadan geçmesidir! Burada bir kısır döngü de yoktur, çünkü noktalar doğrular yardımıyla, doğrular da noktalar yardımıyla değil, hepsi birlikte ve birbirleri ile olan ilişkileri yardımıyla "bilmece" gibi tanımlanmaktadırlar.

Üstelik geometriler çeşit çeşit olduğundan, yukarıdaki nokta-doğru ilişkisi sadece belli bir geometri için geçerlidir ve her geometrinin kendine özgü bir ilişkiler ağı vardır.

Sayı Sayı Değilse, Sayı Nedir?

Son ulaştığımız "tanım stratejisini" şöyle tesbit edebiliriz:

a) Bir yerlerden başlayacağız.

b) Nesneleri özellikleri ile karakterize etmeye çalışacağız.

c) Tek bir nesneyi tanımlamak yerine, onunla yakın ilişki içinde bulunan başka nesneleri de içeren bir topluluğu tanımlamağa çalışacağız ve bu topluluğun temel özellik türü olarak, topluluğun üyeleri arasındaki ilişkileri göz önüne alacağız.

Şimdi diyelim ki, "üç"ü (3) tanımlamak istiyoruz. "3"ü tek başına tanımlayacak yerde 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

"doğal sayılar topluluğu"nu tanımlamaya çalışalım.

Bu topluluğun özellikleri nelerdir?

Dikkatli bir gözlem belki şu özellikleri sıralayabilir:

i) Her sayıyı takip eden (ondan sonra gelen) bir sayı vardır.

ii) Farklı iki sayıyı takip eden sayılar farklıdır.

iii) Öyle bir sayı vardır ki (1), o hiçbir sayıyı takip etmez.

iv) Bu topluluğa ait sayıların bir kısmını göz önüne alsak, (bu kısma "alt-topluluk" diyelim), 1 bu alt-topluluğun içinde olsa, bu alt-topluluğun içindeki her sayının takipçisi de bu alt-topluluk içinde olsa, o zaman bu alt-topluluk bütün topluluğa eşittir.

Bu özellikleri biraz inceleyen bir kimse, bize şiddetli bir itirazda bulunabilir:

Başkasının Sayıları

Bu kimse,

a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, ... harf dizgelerinden oluşan topluluğu göz önüne alıp, "takipçi" kavramını kendine göre yorumlayıp, yukarıda sıraladığımız özelliklerin bu topluluk için de sağlandığını belirtip, bunlar da mı doğal sayı diyebilir!

Bir başkası,

topluluğu için aynı soruyu sorabilir.

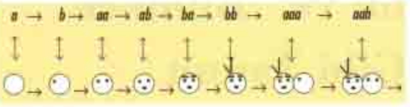
Aslında son ulaştığımız (ve belki biraz gönülsüz kabullendiğimiz) yaklaşıma göre, bunları da doğal sayı kabul etmekten başka çaremiz kalmıyor. Burada "ilişki"nin hatırı için "görünüş"e katlanıyoruz. Daha önce "manânın" "biçimden" önemli olduğunu söylerken, ne garip tecellidir ki, burada sayıların "manâsı", daha üst düzeyde bir "biçim"e (doğal sayılar topluluğunun biçimine) feda edilmiş oluyor!

Kendine göre anlamı olan bir nesne, bir bütünün parçası olarak, o bütünün biçimi çerçevesinde kendi anlamından bir hayli kaybederken; kendine göre pek bir anlamı olmayan bir nesne, bir bütünün çerçevesinde bir anlam kazanabilmektedir.

Sayılar Ne Kadar Keyfi?

Bizim düşündüğümüz doğal sayılarla, yukarıda bize itiraz eden kimsenin doğal sayıları arasında, bütün görüntü farklılıklarına rağmen, büyük benzerlikler vardır. Bu benzerlikler, bunların sağladığı 4 koşul tarafından zorlanmaktadır. Bu koşullar o kadar bağlayıcıdır ki, bunları sağlayan herhangi iki topluluk arasında şöyle bir ilişkinin varlığı gösterilebilir:

İki topluluğun elemanları arasında öyle bir bire-bir eşleme vardır ki, iki topluluğun takipçi olmayan elemanları ("1"leri, ki bunlar tek türlü belirlidir) birbirlerine karşılık gelirler ve birbirlerine karşılık gelen elemanların takipçileri de birbirlerine karşılık gelirler:



İki topluluk arasında bu kadar sıkı bir ilişkinin olması, bu toplulukların "esas itibariyle" "aynı topluluk" olması, olarak değerlendirilebilir. Bu toplulukların "eş yapılı" veya "izomorf" olduğu ve sözünü ettiğimiz dört koşulun, bu koşulları sağlayan topluluğu "belirlediği" söylenir (Bu kavramlara tekrar döneceğiz. Yukarıdaki dört koşul matematikte "Peano aksiyomları" adıyla bilinir ve 19. yüzyılın sonunda formüle edilmişlerdir. Aslında bunlar ilk defa, Peano'dan kısa bir süre önce, sayılar konusundaki büyük düşünür Dedekind tarafından hemen aynen ifade edilmişlerse de, literatüre Peano aksiyomları olarak yerleşmişlerdir).

İlle Peano Aksiyomları mı?

Doğal sayılar topluluğu, başka türlü özellikleri ile de karakterize edilemez mi?

Örneğin, "takipçi" olma ilişkisini bir yana bırakıp, dikkatimizi tasavvurumuzdaki doğal sayıların toplanabilme ve çarpılabilme özelliklerine çevirelim.

Herhangi iki doğal sayı verildiğinde, bunların toplamı ve çarpımı diye düşündüğümüz iki doğal sayı var. Bunların sırasını değiştirip topladığımızda sonuç değişmiyor:

$3 + 5 = 5 + 3$

Üç tane doğal sayı verildiğinde, bunları farklı şekilde gruplayıp, peşpeşe topladığımızda sonuç gene değişmiyor:

$(4 + 2) + 7 = 4 + (2 + 7)$.

Benzer iki özellik çarpma için de geçerli. Bundan başka, gene üç doğal sayı verildiğinde, bunların ikisini toplayıp üçüncüsü ile çarptığımızda bulduğumuz sonuç, ikisini üçüncü ile teker teker çarpıp, sonuçları topladığımızda bulduğumuz sonuca eşit oluyor:

$(4 + 5) \times 2 = (4 \times 2) + (5 \times 2)$.

Ayrıca, öyle bir doğal sayı var ki,

herhangi bir doğal sayı ile çarpıldığında onu değiştirmiyor:
$1 \times 87 = 87$.
(Toplama için aynı işi gören bir doğal sayı olmadığına dikkat ediniz).

Bir başka özellik olarak şunu kaydedebiliriz: İki doğal sayı aynı bir doğal sayı ile çarpıldıklarında sonuçlar eşit oluyorsa, başlangıçtaki iki doğal sayı da eşit olmak zorunda. Gene herhangi iki doğal sayı verildiğinde, bunlar ya eşittirler veya bunlardan (tek) bir tanesine uygun bir doğal sayı eklenerek diğeri elde edilebilir.

Nihayet, çarpmada etkisiz olan sayıyı (1) içeren ve bir doğal sayıyı içerdiği takdirde bu sayıya 1 eklendiğinde (sayı 1 ile toplandığında) bulunan sayıyı da içeren her doğal sayılar topluluğu, bütün doğal sayılar topluluğuna eşit olmak zorunda.

Şimdi birisi çıksa, kendine göre bir topluluk oluştursa, o topluluğun üyeleri için bir "toplama" ve "çarpma" kurgulasa ve yukarıda sıraladığımız özellikleri sağlatsa, ona şu cevabın verilebileceği gösterilebilir:

Bizim doğal sayılarımızla, sizinkiler arasında öyle bir bire-bir işleme vardır ki, bizim m ile göstereceğimiz doğal sayımız sizin, söz gelişi, ▲ elemanınıza karşılık geliyorsa,
(m ↔ ▲)
bizim n doğal sayımız sizin ★ elemanınıza karşılık geliyorsa,
(n ↔★)
sizin toplamanızı ⊕ ve çarpmanızı ⊗ işaretleri ile gösterecek olursak, bizim m + n doğal sayımız sizin ▲ ⊕ ★ elemanınıza, bizim m x n doğal sayımızda sizin ▲ ⊗ ★ elemanınıza karşılık gelir:
m + n ↔▲ ⊕ ★
m x n↔▲ ⊗ ★
Yani doğal sayılar Peano aksiyomlarından başka türlü de, özellikleri yardımıyla "belirlenebilirler".

Maskeli Balo

Demek ki bizi bir topluluğun üyelerinin kendilerine has özellikleri değil de, üyelerin birbirleri ile olan ilişkileri ilgilendiriyorsa ve ilişkiler korunmak kaydıyla, üyelerin kimliğini bilmekten tamamen vazgeçebiliyorsak ve bizim nazarımızda, maskelerin ardına başkaları geçip ilişkiler aynen korunduğunda topluluk hâlâ aynı topluluk oluyorsa, bu topluluğu yukarıda görüldüğü gibi üyeler arası ilişkiler yardımıyla karakterize etmek pekâlâ mümkün olabilecek!

Buna matematikte "aksiyomatik tanım" metodu denir.

Bu metodla yakın ilişkisinden dolayı, okuyucunun sabrını fazla taşırmadan, "aksiyomatik metod" hakkında da birkaç şey söylemek istiyorum:

İspat Ekonomisi

Aksiyomatik tanım metodu, bir topluluğu elamanları arasındaki ilişkileri kullanarak karakterize etmeye dayanıyordu. Bunun için elemanlar arasındaki bütün "önemli" veya "belirleyici" (karakteristik) ilişkilerin dikkate alınması gerekir. Eğer bazı "önemli" ilişkileri gözden kaçırırsak, ele aldığımız ilişkiler o topluluğu "belirlemeyebilir". Yani sağlanması istenen ilişkilerin (koşulların, özelliklerin) pekâlâ geçerli olduğu birçok "topluluk tipleri" mevcut olabilir. Fakat böyle bir durumda bile, nesneleri değil ilişkileri önplâna çıkaran bir yaklaşım, bizi çok önemli bir yönteme götürmektedir. Modern anlamda olmasa bile, bir ispat ekonomisi olarak Öklid tarafından sistematize edilen bu yöntemin ana fikri şudur:

Eğer bir topluluk bir takım koşulları sağlıyorsa (belli özellikleri taşıyorsa), bunların "doğal" sonuçlarına da "katlanmak" zorundadır. Yani, verilen bir koşullar sisteminin, bir topluluk için doğru olması durumunda, belli bir "mantık" çerçevesinde bu koşullardan "çıkarılabilen" sonuçlar da "doğru" olacaktır. Bu sonuçlara "teorem" adı da verilir ve böylece ortak koşulları sağlayan çok farklı topluluklar için, bunları teker teker elden geçirmeden, bir çırpıda ve aynı anda bir teorem "ispat edilmiş" olur.

Yukarıda sözünü edegeldiğimiz koşullara "aksiyom" adı da verilir. Ne kadar "az" aksiyom varsa, bunları sağlayan o kadar "çok" topluluk olabilir ve teorem o ölçüde genel olur. Ne kadar "çok" aksiyom varsa, bunları sağlayan o kadar "az" topluluk olur ve teorem de o ölçüde spesifik olur. Aksiyomların yeterli sayıda ve uygun yapıda seçilmesi halinde, bunları sağlayan esas itibariyle"bir" topluluk olur ve bu durumda aksiyomatik metod, aksiyomatik tanım metoduna dönüşür.

Kararan Ufuklar ve Bir Sevdanın Sonu

Aksiyomatik metod biraz daha kültive edildiğinde, şimdiye kadarki yaklaşım ve vurgumuza paralel bir şekilde "topluluk"lardan da vazgeçilir ve geriye ilişki ve özelliklerin bizatihi kendileri demek olan aksiyomlar kalır. Yani bunlar bir anlamda "maddesiz ruh" gibi, kendilerini taşıyan topluluklardan arındırılmış pür ilişkilere dönüşürler. Bu noktadan itibaren matematiğin kendisi de bu aksiyomlardan sonuç çıkarma faaliyetine indirgenir. Bu "tartışmalı" faaliyete konu olan aksiyom sistemlerinden yalnızca "tutarlı" olmaları istenir. Başka herşey serbesttir! (Tutarlılık, eldeki aksiyom sisteminden hareketle bir iddianın hem doğru, hem de yanlış olduğunun çıkarılamaması anlamındadır).

İş bu noktaya gelince bazı büyük matematikçiler (Hilbert) matematiği onu taşıyan maddesinden arındırmak sevdasına kapılmışlardır ve bu da 1930'lu yıllarda yeni ve çaresiz bir hüsranla sonuçlanmıştır. Çünkü Gödel, çok makul bazı şartlar altında, böyle aksiyom sistemlerinin tutarlılığının, sistem içinde kalınarak kanıtlanamayacağını kanıtlamıştır!

Bu hüsranı kavramak için, "biçimsel matematiksel sistemler" kavramına değinmek gerekiyor. Okuyucu bu konuya ilgi gösterirse, bu hikâyeyi Ali Nesin'in anlatması daha doğru olur.

Hem o zaman belki bu işin bir yan tesiri olarak, herkesin matematiğin dili zannettiği "kümeler teorisi"nin herhangi bir teori gibi bir teori olduğu, bir sürü kümeler teorilerinin bulunduğu, modern matematik denilen çarpıtılmış kavramın bir tuhaf garabet olduğu da kavranıp, özellikle orta-öğretim matematiğine yaklaşımda bir nebze ferahlık sağlanabilir.