BİLİM DAMLALARI

Doç.Dr. Selçuk ALSAN

MATEMATİKTE GARİP SAYILAR

Matematikte (π) **(pi)** kadar ünlü bir başka sayı vardır: **e.** e natürel logaritmaların tabanıdır. Bu sayıyı anlamak hiç de zor değildir; e'yi en iyi, bir niceliğin büyümesi yolu ile tanımlayabiliriz. Bankaya 1 lira koyunuz diyelim, banka yılda % 4 faiz veriyor olsun. 25 yıl sonra paranız 2 lira olur. Fakat bir de bankanın bileşik faiz ödediğini düşünün; bileşik faizde faiz ana paraya değil, "ana para + faiz"e uygulanır. Bileşik faizde para daha hızlı büyür. Faiz ne kadar sık aralarla hesaplanırsa büyüme hızı o kadar artar. Örneğin deminki örnekte faiz yıllık hesaplanırsa 1 lira 25 yıl sonra $(1 + 1/25)^{25} = 2.66$ liradan fazla olacaktır. Faiz 6 ayda bir hesaplanırsa (o zaman tabii % 2'den) 1 lira 25 yıl sonra $(1 + 1/50)^{50} = 2.69$ liradan fazla olur. Bir genelleme yaparsak 25 yılda 1 lira n sonsuza giderken $(1 + 1/n)^n = 2.718...$ gibi bir limite yaklaşır. İşte bu limit (2.718....) e sayısıdır. Bunu şöyle de söyleyebiliriz: Bankanın verdiği faiz ne olursa olsun, 1 liranın 2 lira olması için geçen sürede bileşik faiz uygulanırsa 1 lira e lira olur. Bir parabol bir doğru boyunca yuvarlandığında parabolün merkezi bir katenarian (zincir eğrisi) çizer. Katenarian'ın biçimi ve formülü şekilde görülüyor. Katenarian'ın önemi doğada da rastlanmasındandır. Rüzgârla şişen yelkenler katenarian çizer. Marshall, Caroline ve Gilbert adaları deniz tabanında massif bazalt yığınlarının birikmesinden oluşmuş volkanik deniz tepeleridir, bu tepelerin profili de bir katenarian'dır. Fransız böcek bilimcisi J.H.Fabre Örümceğin Hayatı kitabında, sisli sabahlarda örümsek ağlarının su damlacıkları ile yüklenerek yanar döner elmasları andıran katenarianlar çizdiğini anlatır ve şöyle der: "... ve bu ağların şanını e oluşturuyordu".

gibi e de transendental (aşkın) bir sayıdır, yani gerçek katsayıları olan bir cebirsel denklemin köklerinden biri olarak ifade edilemez, cetvel ve pergelle bir doğru parçası olarak gösterilemez.

gibi e de sonsuza giden bir kesir veya sonsuz bir serinin limiti olarak ifade edilebilir. Örneğin e şöyle yazılabilir:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \cdots$$

Bu sürekli kesir 18. yüzyılda İsviçreli matematikçi Leonhard Euler tarafından bulunmuştur. e sembolünü ilk kullanan da Euler'dir (Euler e'yi a'dan sonra gelen ilk sesli harf olarak seçmişti; çünkü o sıra a'yı bir başka sayı için kullanıyordu. e'ye Euler sayısı dendi).

Süre çok uzunsa küçük faizler bile 1 lirayı dev boyutlara ulaştırır, örneğin milattan sonra 1 yılında yıllık % 4 faizle bankaya konan bir para 1960 yılında 1.04^{1960} lira olurdu, bu 32 haneli bir sayıdır.

Bu tip büyümenin özelliği şudur: Büyüme hızı her an niceliğin büyüklüğü ile oranlıdır. Bir diğer deyişle, herhangi bir anda niceliğin artışı, niceliğin o andaki miktarının daima belli bir yüzdesi kadardır. Durum tıpkı tepeden aşağı yuvarlanan bir kartopuna benzer. Kartopunun büyüklüğü arttıkça büyümesi de hızlanır. Birçok organik olayda da görüldüğü için buna "organik büyüme" denir. Örneğin dünya nüfusunun artışı da böyledir. Fizik, kimya, biyoloji ve sosyal bilimlerde böyle organik büyümeler çoktur.

Bütün bu gibi olayların formülü $y = e^x$'dir. Buna diğer üstel (eksponensiyel) fonksiyonlardan ($y = 2^x$ gibi) ayırdetmek için ana üstel fonksiyon denir. $y = e^x$ fonksiyonunun türevi $y^1 = e^x$'dir, yani $y = y^1$ dir. Mühendislikte kullanılan logaritmalar 10 tabanına, matematik analizde kullanılan natürel logaritmalar ise, e tabanına dayanır.

e sayısı katenarian (zincir eğrisi) denen eğrinin formülüne girer. Katenarian, iki ucundan tesbit edilmiş bir ip aşağı sarkıtıldığında oluşan eğridir. Parabol, hiperbol, elips ve daire bir düzlemin bir koniyi kesmesi sırasında oluşan eğrilerdir (konikler). Katenarian parabole benzemekle birlikte bir konik değildir. $(1 + \frac{1}{n})^n$ formülü açılırsa e bir sonsuz seri olarak ifade edilmiş olur:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(1)}{1.2.3\ldots n} \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

Burada ünlem işareti faktoriyel olarak adlandırılır, $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ dır, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ dür vb. Bu yakınsak (konverjan) bir sonsuz seridir; yani serinin terim sayısı arttıkça serinin toplamı bir limit değere yaklaşır. 1961'de New York'ta IBM merkezinde e sayısı 100265. ondalığa kadar hesaplandı.

1, , e ve i (eksi 1'in karekökü) arasındaki ilişkiyi Abraham de Moivre formülü verir:

$$e^{i\pi} = -1$$

Bu formül Euler formülünün X = için özel bir halidir:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

cos = 1 ve sin = 0 olduğundan

e^{i} = — 1 bulunur.

Matematik ve Hayal kitabında E. Kasner ve J.R. Newman, bu formül için şöyle der: "Zarif, kısa ve anlam dolu. Onu tekrar tekrar yaratmak zorunluğu duyuyoruz; uygulamalarının ise sonu gelmiyor. Formül, gizemciye (mistik), bilim adamına, filozofa ve matematikçiye aynı derecede hitap ediyor". Harvard matematikçisi B.Peirce ise birgün derste bu formülü tahtaya yazdıktan sonra şöyle demişti: "Bu kesinlikle doğru ve o oranda paradoksal bir formüldür. Bu formülü anlamamıza imkan yok. Ne demek istiyor bilmiyoruz. Fakat onu kanıtladık; o halde doğru olmalı".

n cismin kaç şekilde dizilebileceğini permütasyon hesapları verir, örneğin n cisim kendi arasında n! sayıda farklı dizilebilir. e sayısı bu gibi problemlerde de ortaya çıkmaktadır. Bunun klasik örneği karışan şapkalar problemidir. Vestiyerdeki dikkatsiz kız şapkanın numaralarını birbirine karıştırmıştır, her gelene gelişigüzel bir şapka uzatır. En az bir adamın kendi şapkasını giyme olasılığı nedir? Benzer olarak dalgın bir sekreter belli kişilere yazılmış mektupları o kişiler için hazırlanmış zarflara gelişigüzel koyup zarfları yolluyor. En az bir mektubun kendi zarfına girmiş olması olasılığı nedir? Gemiciler, içkili olarak gemiye dönüp ranzalara gelişigüzel dağılıp uyuyorlar. En az bir gemicinin kendi ranzasında uyuma şansı nedir?

Burada iki şeyi bilmek zorundayız: 10 şapka kaç değişik şekilde sıraya dizilebilir (permütasyon) ve bunlardan kaçı herkese yanlış şapka verdirtir? İlk sorunun yatını 10!'dir. Bu 3 628 800 yapar. Bu sayıdaki dizilişlerden hangilerinin yanlış şapka vermeye yol açtığını kim tek tek inceleyebilir ki? Bunun için şu yöntem kullanılır: "Yanlış" permütasyonların sayısı 10!/e'ye en yakın tam sayıdır, bu da 1 334 961'dir. Her adama yanlış şapka verilmesi olasılığı 1334 961/3 628 800 = 0.367...dir. Bu sayı 10!/10!e'ye çok yakındır. Demek ki adamların herbirinin yanlış şapka alması olasılığı 1/e'dir. En az bir adamın doğru şapka alma olasılığı 1-1/e = 0.6321 olur, yani 2/3.

Bu problemin ilginç yönü şudur: 6-7 şapkanın üzerindeki şapka sayısı yanıtı etkilemez. 10 adam da olsa, 10 milyon adam da olsa en az 1 adamın kendi şapkasını alma olasılığı 0.6321'dir.

Buna benzer bir problem de şudur: 52'lik bir deste kart alın. Sırası ile 1'den rua'ya kadar (1,2,3,4, 5,6,7,8,9,10,vale,dam,rua) maça, ispati, karo ve körleri sayıp her keresinde yere 1 kart koyun. Yerdeki kartın söylediğiniz kart olma olasılığı yine 1-1/e = 2/3'dür.

e, ve i (eksi bir'in karekökü): değişik tarihlerde birbirinden habersiz büyük beyinlerce bulunmuş üç matematik sayısıdır.

Tüm uygarlık bu sayılar üzerinde duruyor ve ne tuhaf bir ilişki ki, bu üç sayı, birbirine bağlı: e^{i} = — 1

İki ucundan asılan bir zincir katanerian (zincir eğrisi) çizer, bunun formülü şöyledir:

$$y = \frac{a}{2}\left(\frac{x}{a} + e\,\frac{-x}{a}\right)$$

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{\ddots}}}}}$$

e'nin sonsuz bir bölüm olarak yazılışı

LOCH NESS CANAVARI

Uzun bir süredir İskoçya'daki Loch Ness gölünde bir canavar yaşadığı yolunda haberler geliyor. Bazılarına göre Loch Ness canavarı İngilizlerin bilinçaltı derinliklerinde gezen bir hayaletten başka birşey değildir. Bilimsel bir çalışma şunu göstermiştir: Gölün dibinde binlerce yıldır çürümekte olan dev ağaç gövdeleri, içlerinde biriken gazların etkisiyle yüzeye çıkıp tekrar dibe batabilir. Bu olay "canavar"ın birçok kereler görülmesini açıklayabilir. Ne var ki diğer bazı İngiliz bilim adamları, bu gölün dibinde çok büyük bir hayvanın yaşadığına adları gibi inanmaktadır. Bunlardan biri Bilimsel Araştırma Derneği adına bir ekibin başında canavarı arayan Adrian Shine'dır. Son zamanlarda canavar hakkında yeni bulgular elde edilmiş ve bunlar The New Scientist dergisinde yayınlanmıştır.

Birinci bulgu: Tahminlerin aksine canavar gölün dibinde yeterli yiyecek bulabilecektir. Loch Ness gölü hayata pek uygun değildir; bulunduğu enlem, az güneş alışı ve kayalıklar içinde bulunuşu nedeniyle mikroskobik bitkileri (fitoplanktan) azdır. Buna karşı sıcaklığı bütün yıl aynı kalır, yüzeyi donmaz ve az miktarda da olsa çürümüş bitkiler, hayvanların solunumu için gerekli oksijeni sağlar.