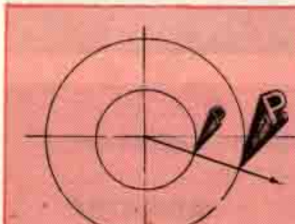
MATEMATİK SONSUZ

Sonsuz çok, çok büyük kuşkusuz. Fakat bazı sonsuzlar diğerlerinden daha da büyük.

Rudy RUCKER

Sonsuzu hayalde canlandırmak zor. En uzak yıldızdan bile öteye uzanan karanlık ölü bir boşluk. Bir karabasanda içine düştüğümüz dipsiz bir kuyu. Kuyruğunu yakalamaya çalışan köpek örneği, bir mantık zincirinin daire çizerek hep aynı noktaya varması.

Fakat matematikçiler ve filozoflar için de sonsuzu kavramak kolay değil. Örneğin bir doğru alalım, bu doğru üzerinde kaç nokta var, tabii ki sonsuz sayıda nokta var. Şimdi bu doğrunun iki katı uzunlukda bir doğru alalım, bu doğru üzerinde kaç nokta var: yine sonsuz. Oldu mu ama: Doğrunun uzunluğu iki kat olunca, üzerindeki nokta sayısı da iki kat olmalıydı, değil mi ya? Ya da şekilde görülen iki iç içe aynı merkezli (konsantrik) daireye bakalım, biri diğerinin iki katı. Bir yarıçap çizerek, her iki daire üzerinde birer nokta belirleyelim. Bu mantığa göre, küçük daire üzerindeki her noktaya karşılık büyük daire üzerinde bir nokta vardır. Fakat işin tuhafı şudur: Küçük daire üzerinde de, büyük daire üzerinde de aynı sonsuz sayıda nokta vardır; fakat küçük dairede sonsuz noktanın yanyana gelmesi ile oluşan çevre ($2\pi r$), büyük dairede aynı sayıda sonsuz noktanın yanyana gelmesi ile oluşan çevrenin ($2\pi R$) yarısı kadardır. Bir daire çevresini sonsuz küçük parçaya böldüğümüzde, artık bölünemeyecek kadar küçük parçaya "nokta" diyoruz. Bu aslında noktanın boyutlarının sıfır olduğunu söylemekle aynı şey, çünkü ancak sıfır artık ikiye bölünemez. O zaman küçük dairede şöyle bir şeyi kabul etmiş oluyoruz: noktanın boyutu = 0, nokta sayısı = sonsuz, daire çevresi = $2\pi r$, demek ki 0 x sonsuz = $2\pi r$'ı kabul etmiş oluyoruz. Büyük dairede ise 0 x sonsuz = $2\pi R$ oluyor. Oysa buradan $2\pi r = 2\pi R$ gibi mantık dışı bir sonuca varılır. O zaman ya küçük dairedeki nokta boyutunun 1/2 daha küçük, ya da büyük dairedeki sonsuzun iki kere daha büyük olduğunu kabul etmemiz gerekiyor.



Küçük daire üzerindeki her noktaya karşılık, büyük daire üzerinde bir nokta vardır.

Halbuki 0/2=0 ve 2xsonsuz=sonsuz olduğundan, buna olanak yok. Bu, insan mantığını şu noktaya getirmiyor mu: Sıfırdan küçük sıfırlar ve sonsuzdan büyük sonsuzlar olabilmeli.

Bu tip açıklanabilmesi zor ve çelişkili tarafları olduğu için Ortaçağ düşünürleri örneğin St Tomas Aquinas, sonsuz sayılara karşı çıkmıştı. Aquinas, yalnız Tanrı sonsuzdur diyordu. Galile ise sayıların sonsuz olabileceğine, fakat sonsuz sayılar için sonlu sayılardan ayrı kurallar olduğuna inanıyordu.

Matematik sonsuz, ancak 19. yüzyılda incelenmeye başlandı. Modern matematik olarak ortaokullarda öğretilen Set (kümeler) kuramının en yüksek şekli, "Sonsuz"un incelenmesi olmaktadır. Bu konuyu en geniş biçimde George Cantor inceledi. Cantor, bugün D. Almanya'da bulunan küçük bir üniversitede matematik profesörü idi. Çağdaş bilim adamlarından ancak bir bölümü, O'nun yapıtlarının önemini ve derinliğini anlayabilmişti; fakat bunun yanı sıra güçlü düşmanları da vardı. Bazı matematikçi ve filozoflar, sonsuz setleri sonlu setler gibi hesaplamaya karşı çıktı Birkaç teolojisyen (din bilgini) ise, matematik sonsuzla uğraşmanın Tanrı'ya karşı çıkmak olduğunu ileri sürüyordu. Cantor, dindeki sonsuzluk kavramı ile Dünya'daki sonsuzluk kavramını birbirinden ayırdı Dünya'daki sonsuzluk kavramını da, somut ve soyut diye ikiye ayırdı. Yıldızların sonsuzluğunu, ya da maddenin sonsuz küçük parçadan oluştuğunu düşünmek somut sonsuzdu. Matematikde ise 1,2,3,4,...... diye hep 1 eklenerek büyüyen sayıların sonuncusu soyut sonsuzdu ve Yunan-

"Pi" sayısı sonsuza gider.

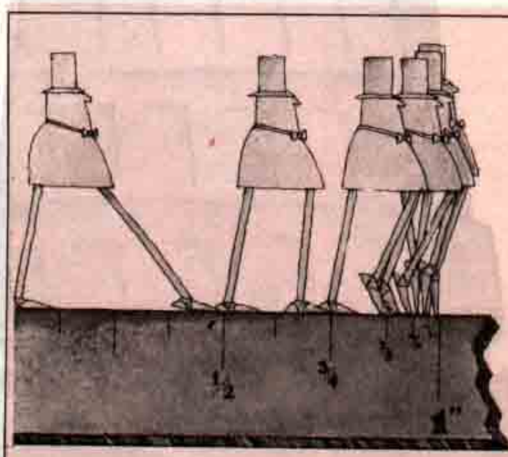
ca omega (ω) harfi ile belirtiliyordu (veya bazen yatay sekiz olarak: ∞).

M.Ö. 5. yüzyılda Elealı filozof Zeno, omegayı incelemişti. Cetvel üzerinde 1 inçlik (=2.5 cm.) bir uzunluk aldığınızı düşünün. Şimdi bu 1 inç üzerinde yürüyen hayali bir yaratık düşünelim. Öyle ki, bu yaratık daima önünde duran yolun yarısı kadar adım atsın, örneğin önünde 1 inç varken adımı 1/2 inç, 1/2 inç varken 1/4 inç, 1/4 inç varken 1/8 inç... olsun. Yaratığın gittiği yol sırası ile 1/2, 3/4 $\left(=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$, 7/8 $\left(=\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\right)$, 15/16 $\left(\frac{7}{8}+\frac{1}{16}\right)$ .... olur.

(1/2, 3/4, 7/8, 15/16...nin genel formülü $1-\frac{1}{2^n}$ dir. n = sonsuz için bu formül 1'e eşittir. Demek yaratık sonsuz adım sonra 1 inç ileri gidecektir). Şimdi çelişki şuradadır: 1 inçe ω (sonsuz) nokta yerleştirebiliyorsak 2 inçe ω + ω nokta yerleştirebilmeliyiz. Oysa bugün matematikde 1 inç içinde de sonsuz sayıda nokta vardır, 2 inç içinde de sonsuz sayıda nokta vardır diyoruz, sonsuzun iki katı nokta var diyemiyoruz. Çünkü soyut olarak sonsuzdan fazla veya sonsuzun katı bir sayı düşünemiyoruz, tabii ki sonsuzdan fazla veya sonsuzun katı bir sayı olsa, o zaman başta sonsuz dediğimiz şeyin sonsuz olmadığını kabul etmiş oluyoruz. Öyle ya, kendinden daha büyük bir sayı varken bir sayıya nasıl sonsuz deriz. Fakat aslında 1 inç'in içinde sonsuz, 2 inç'in içinde sonsuz + sonsuz sayı var dememiz gerekiyor. İşte burada sonsuzluk çelişkilerinden biri yatıyor. Sonsuz, niceliğin son sınırı sayılıyor; fakat pratikte bazen sonsuzun da ötesinde bir nicelik düşünmemiz gerekiyor veya başka bir deyişle, bazı sonsuzların diğerlerinden daha büyük olması gerekiyor.

1943'de ölen büyük Alman matematikçisi David Hilbert, sonsuzluk gerçeğini "sonsuz otel" örneğinde inceledi. Öyle bir otel hayal edelim ki 60 m. yükseklikde olmasına rağmen sonsuz katı var. Otelin tepesine gidildikçe tavanlar alçalıyor; çünkü her kat otelin kalan yüksekliğinin 1/20'si kadar. Otele bir yolcu gelir, kendisine boş oda olmadığı söylenir. Yolcu "Olamaz, otelde sonsuz oda var diye ilan etmişsiniz" der. Otelci de, "Neden olmasın, otelde sonsuz oda varsa sonsuz da konuk var" diye yanıtlar. Yolcu o zaman şunu önerir: "1. odadaki kişiyi 2. odaya, 2. odadakini 3. odaya... nakledin. Bana 1. odayı verin." Tabii bu teorik olarak olasıdır. O sırada yolcular doluşur. Otelci işi şöyle halleder: Otelin eski müşterilerini çift sayılı odalara, yeni müşterileri tek sayılı odalara koyar. ω + ω müşteriyi ω odaya yerleştirmeyi başarmıştır.

Bu noktada insan tüm sonsuzlukların aynı olduğunu düşünür; fakat Cantor'un 1874'de ortaya koyduğu ünlü Süreklilik Kuramı açıkca şunu belirtir: **Birbirinden farklı büyüklüklerde sonsuzlar vardır.** Bu düşünce o kadar şaşırtıcıydı ki bazı insanlar O'na inanmak istemediler. Fakat Cantor, "köşegensel tartışma" denen bir yöntemle şunu kanıtladı: Tüm gerçek sayıları içeren bir set, tüm doğal sayıları içeren bir setten daha büyüktür. Matematikde gerçek sayı denince herhangi bir sayı, örneğin pi (π) gibi sonsuz ondalıklar içeren sayılar anlaşılır: 3.141592... Doğal sayılar denince, pozitif tam sayılar anlaşılmalıdır: 1,2,3,4,... gibi. Yanyana üç nokta, sonsuz bir sayı serisini gösterir. Şimdi, eğer Hilbert



Dalma önündeki yolun yarısı kadar uzunlukta adım atan hayali yaratık.

otelinin konuklarını doğal sayılar yerine gerçek sayılar olarak düşünürseniz, Cantor teoremi şunu söyler: Ne kadar ustalıkla yerdeğiştirirseniz değiştirin gelen her konuğa bir oda vermeniz olanaksızdır.

Uzaya, Mutlak Sonsuz gözüyle bakabiliriz. Uzay sonsuzun sonsuzluğudur. Set kuramcıları, Mutlak Sonsuzu Ω (büyük omega) harfi ile gösterirler. Mutlak sonsuz düşünülebilecek en büyük sayıdır, ona artık başka sayı eklenemez. Fakat bir kez daha matematikçilerin karşısına büyük bir engel çıkmaktadır, o da Mutlak Sonsuz üzerinde gözlem yapmanın olanaksız oluşudur.

Yansıma Kuralı denen aksiyomu kullanarak, set kuramcıları şu sonuca varmıştır: Mutlak Sonsuz'a giderek yaklaşmak üzere, giderek daha ve daha büyüyen sonsuzlardan oluşan başdöndürücü bir kule vardır. Bu sonsuz büyük sayılara "kardinaller" denmektedir; bunlar arasında şu kardinaller sayılabilir: Mahlo ve Ramsey kardinalleri, zayıf kompakt, ölçülebilir, tarif edilmez, genişleyebilir ve en yeni olarak da (fakat en son değil) dev kardinaller. Yalnız dev kardinalleri anlatmak için bile koca bir matematik sembol kitabı gerekir.

Bu çeşitli sonsuzların pratikte uygulanışları azdır; yalnız sonlu matematik problemlerinin bazıları, sonsuzluk kullanarak basitleştirilebilir. 1960'larda Abraham Robinson "standart olmayan analiz" adlı yeni bir yüksek matematik tekniği başlattı. Bu teknikde 0 ile 1 arasında, sonsuz küçük sayılar var olduğu kabul edilir. Son zamanlarda standart olmayan analiz, teorik ekonomide kullanılmaya başlandı.

Gerçek hayatta bir sonsuz örneği vermek zordur. Daha 20 yıl önce birçok bilim adamı evrenin sonsuz sayıda yıldız içerdiğini sanıyordu. Fakat Arno Penzia ve Robert Wilson'un Evreni oluşturan Büyük Patlama'dan kalan artık ışıma üzerindeki Nobel ödülü kazanan buluşları durumu değiştirdi: Bugün evrende 10^{24} yıldız olduğunu biliyoruz.

Evren sonsuz olmasa bile, ömrü sonsuz olabilir. Evren sonsuzdan uzun yaşayabilir mi? Fakat sonsuzla ilgili çelişkilerden biri şudur. Hayal ettiğiniz en büyük sayının bile, örneğin

"Sonsuzluk Oteli"

iki katı olması gerekir ve tabii ki 2 katı daha büyüktür. Örneğin sonsuzu ω ile belirtip evrenin yaşı ω yıldır desek, biri sorabilir: Peki evrenin yaşı ω + ω yıl da olamaz mı? Bazı kozmologlara göre, eğer uzayda dönmekte olan bir "siyah deliğin" içine girebilseydik, geri fırlar ve gelecekte ω (sonsuz) yıl sonra tekrar görünürdük.

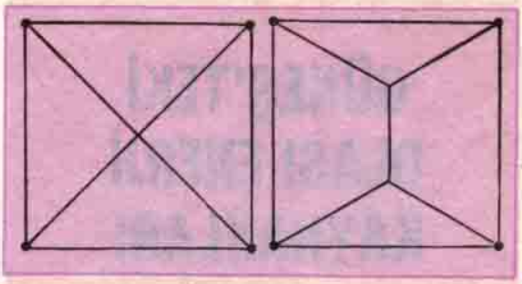
Cantor'a göre iki tip madde vardır: Normal madde ve "eter".. "Eter" enerji nakli ile ilgilidir. Normal madde ω (sonsuz) sayıda parçacığa bölünebilir. Eter ise ω'dan da büyük sonsuz sayıda parçacığa bölünmüştür.

Maddenin sonsuz küçük parçacıklardan oluşması olasılığı yüksek enerji fizikçilerini her gün daha çok düşündürmektedir; çünkü madde giderek daha küçük parçacıklara ayrılmaktadır. Bir kaya, molekül bulutlarından, molekül, atom bulutlarından, atom ise leptonlardan ve kuark bulutlarından oluşmaktadır. Maddenin parçalara bölünmesi olayı, acaba sonsuz mudur?

Eğer öyleyse, madde diye birşey yok demektir. "Parçacık" (partikül) dediğimiz şeyler aslında birer boşluktur, yalnızca bu boşlukta daha küçük diğer parçacıklar yüzmektedir. Her parçacık, daha küçük diğer parçacıklardan oluşmuştur. Madde dediğimiz şeyin sonsuz karmaşık bir yapısı vardır: Bir bulutun bulutunun bulutunun bulutunun..... bulutudur madde.

Bazı sınırlı sayılar da çok büyüktür.

Sonsuzu kavramak zordur. Bazı sayılar sonsuz olmasalar bile zor kavranır. Bazı sayılar o kadar büyüktür ki, insan ve kompüterlerin hesaplama sınırını aşar. Matematikçiler, en büyük kompüterlerde bile çözülmeleri milyarlarca yıl alacak kadar karmaşık problemler olduğunu göstermişlerdir. Bu gibi "içinden çıkılmaz" problemler yalnız matematikçiler eğlensin diye değildir. Telefon devrelerini bağlarken bu tip problemler ortaya çıkabilir. Bir karenin köşelerinde yaşıyan dört aboneyi birbirine bağlamak için en az tel gitmesini sağlayan formül, karenin köşegenleri değil, 120°'lik iki açının birleştirilmesidir (Şekle bk). Böyle bir problemin 10 abone için 1.000 çözümü, 50 abone için 1 trilyon çözümü vardır.



4 telefon abonesinin en kısa yoldan karşılıklı bağlanması.

Bu tip hızla artışa "eksponensiyel (logaritmik)" artış denir. Satranç-kompüter programlarını yaparken de böyle problemler doğar: Sıra kendisinde olan her oyuncu, ortalama 35 değişik hamle yapabilir, bu hamlelerin herbirine karşı, yine 35 değişik yanıt olabilir vb. iki hamlede olası değişik pozisyonların sayısı 35^2 veya 1225, üç hamlede olası değişik pozisyonların sayısı ise 35^3 veya 42875'dir. 4 hamle sırasında bir buçuk milyon değişik pozisyon oluşabilir.

Buna benzer bir problem şudur: Bir firma, bir elemanının belli bir bölgedeki tüm kentleri ziyaret etmesini istiyor; bunun için en kısa yol hangisidir? Kompüter bu tip problemleri eksponensiyel (logaritmik) olarak artan deneme-bozma metodu ile çözer. Matematikçiler, 20 yıldır logaritmik olarak artan çözümlere daha kısa yoldan varmayı denemişler, fakat başarısız olmuşlardır. Daha kısa bir çözüm bulunamayacağa benzemektedir.

Matematikçiler, bazı problemler için logaritmik artışı önlemenin olanaksız olduğunu kanıtlamışdır. Öyle problemler vardır ki, tüm evreni dolduran en güçlü kompüterler bile ancak 20 milyar yılda çözebilir.

Öyle görülüyor ki insanın sonsuzu tam anlamı ile kavrayabilmesi sonsuz çabalar gerektirmektedir.

Science 82'den

Çev: Dr. Selçuk ALSAN

İnsan yürüyüşe yanlız çıkmaktan hoşlanabilir; ama fikirlerinde yanlız kalmaktan nefret eder. **George SANTAYANA**