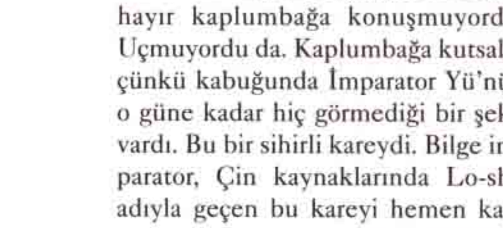
Kaplumbağanın Sırtındaki Sır

Sihirli Kareler

İnsanoğlu sayıları kullanmaya başladığı ilk zamanlardan itibaren, sayıların içinde saklı sırlar aramış ve bulduğu bu sırları tanrıların kendisine yaptığı oyunlar olarak değerlendirmiştir. İşte binlerce yıl insanları meşgul eden ve birçokları tarafından kutsal kabul edilmiş olan "sihirli kareler" de bu sırlardan biri. Bugün kutsal olmadıklarını biliyoruz ancak hâlâ tam olarak çözülememiş yönleriyle insanoğlu için bir sır olmayı sürdürüyorlar.

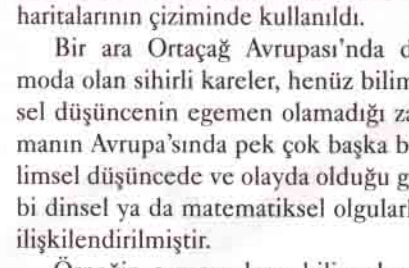
Yetenekli bir devlet adamı ve büyük bir bilge olan Çin İmparatoru Yü, sık sık taşan ve halk arasında lânetli olduğuna inanılan Sarı Irmak'ın kenarlarına topraktan bir set yaptırıyordu. Birden önünde kutsal bir kaplumbağa gördü. Hayır, hayır kaplumbağa konuşmuyordu. Uçmuyordu da. Kaplumbağa kutsaldı çünkü kabuğunda İmparator Yü'nün o güne kadar hiç görmediği bir şekil vardı. Bu bir sihirli kareydi. Bilge imparator, Çin kaynaklarında Lo-shu adıyla geçen bu kareyi hemen kaydetti ve sihirli karelerin günümüze kadar sürecek 3000 yıllık serüveni başlamış oldu.



Sihirli karelerin Çin'de başlayan serüveni İpek Yolu kervanlarıyla Hindistan'a ve çok sonraları da Eski Yunan'a taşındı. Batıda sihirli karelerle ilgili ilk yazılı kaynak yaklaşık olarak M.S. 130 yılına ait İzmirli Theon'un yapıtıdır. 9. yy'da ise Arap dünyasına giren sihirli kareler Arap astrologlar tarafından gök haritalarının çiziminde kullanıldı.

Bir ara Ortaçağ Avrupası'nda da moda olan sihirli kareler, henüz bilimsel düşüncenin egemen olamadığı zamanın Avrupa'sında pek çok başka bilimsel düşüncede ve olayda olduğu gibi dinsel ya da matematiksel olgularla ilişkilendirilmiştir.

Örneğin o zamanların bilimadamlarından(!) Cornelius Agrippa (1486-1534) 1x1'lik sihirli karenin sonsuzluğu ve birimi simgelediğini iddia etmiştir. 2x2'lik sihirli karenin olmayışı ise dört temel öğenin yani hava, toprak, ateş ve suyun yetersizliğinin kanıtıymış. Büyücülük suçundan bir yıl hapis yatan Cornelius'a göre 3x3, 4x4,5x5,6x6,7x7,8x8 ve 9x9'luk sihirli kareler de, sırasıyla, Satürn'ü, Jüpiter'i, Mars'ı, Güneş'i, Venüs'ü, Merkür'ü ve Ay'ı simgeliyorlardı.



Başka bir Ortaçağ bilimadamı(!) ise 2x2'lik sihirli karenin olmayışını Adem ile Havva'nın işledikleri ilk günah yüzünden verilmiş bir ceza olarak açıklıyordu.

Gerçekten de sihirli kareler oldukça ilginçtirler ve binlerce yıl boyunca binlerce insanın ilgisini çekmiş olmaları da bunun bir göstergesidir. Sihirli kareleri incelemeye önce bir tanım vererek başlayalım. Sihirli kare, içinde 1'den n^2'ye kadar sayıların yazılı olduğu nxn boyutlarında bir karedir. Ancak bu sayılar öyle yazılmışlardır ki her satır ,sütun ve köşegenin toplamı aynı sayıya eşittir. En basit sihirli kare 1x1 boyutlarındadır.

2x2 boyutlarında bir sihirli kare ise yoktur. İmparator Yü'nün kaplumbağanın sırtında gördüğü söylenen 3x3'lük sihirli kare ise şöyledir:

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Bu karenin tüm satır, sütun ve köşegenlerindeki sayıların toplamı 15'tir. Daha ilkokul çağlarında görmeye başladığımız bu kare, sihirli karelerin özelliklerini belirgin biçimde taşıyan en basit örnektir. Bu karenin derecesi üçtür. Bir sihirli karenin derecesi onun satır ya da sütun sayısı olarak tanımlanır.

Şimdi derecesi n olan bir sihirli karenin sihirli toplamını, yani her satır, sütun veya köşegenindeki sayıların toplamını, n cinsinden hesaplayalım.

Sihirli karede 1,2... (n^2-1), n^2 sayıları yazılı olduğuna göre tüm sayıların toplamı:

$1+2+3+\ldots+n^2=[n^2(n^2+1)]/2$ dir.

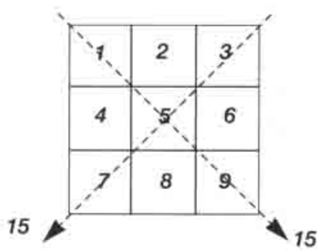
n dereceli sihirli karede n tane satır bulunduğuna göre her bir satırın toplamı

$(1/n)[n^2(n^2+1)]/2=[n(n^2+1)]/2$

olur.

Aynı şekilde sütun ve köşegenlerdeki sayıların toplamı da bu sayıya eşit olmalıdır.

Bu sayıyı bulmanın bir başka yolu da nxn boyutlarında bir kareye sol üst köşeden başlayarak, 1'den n^2'ye kadar sayıları her satıra sırasıyla yazmaktır. Karenin herhangi bir köşegenindeki sayıların toplamı sihirli toplamı verir. (Neden?)



Matematikçilerin senelerce sihirli karelerle uğraşmalarının en önemli nedeni sihirli karelerle ilgili sorulara yanıt bulmaktır. Bu sorulardan bir kısmı yanıtlanabilmiş bir kısmı ise bugün bile yanıtsız, matematikçileri beklemektedir.

Sorulardan biri, "elimizdeki bir sihirli kareden yenileri elde edilebilir mi?" sorusudur. Örneğin Lo-shu tek 3. dereceden sihirli kare midir? Şurası açık ki Lo-shu'yu 90°, 180° veya 270° döndürerek elde ettiğimiz kareler de sihirli olurlar.

```
2 7 6    6 1 8    8 3 4
9 5 1    7 5 3    1 5 9
4 3 8    2 9 4    6 7 2
```

Aynı zamanda bir sihirli karenin aynada yansımasıyla oluşan kare, toplamlar değişmediğinden yine bir sihirli karedir. Elimizdeki 3 x 3'lük karelerin aynada yansımalarını alırsak dört tane yeni sihirli kare elde ederiz.

```
2 9 4    6 7 2    8 1 6    4 3 8
7 5 3    1 5 9    3 5 7    9 5 1
6 1 8    8 3 4    4 9 2    2 7 6
```

Böylelikle elimizde toplam olarak 8 tane 3. dereceden sihirli kare etti. Acaba bunlardan başka var mı? Hayır yoktur. Bunu ispatlayabilmek için toplamı 15 eden üçlülere bakmamız gerekli. Bunlar: (1,5,9), (1,6,8), (2,4,9), (2,5,8), (2,6,7), (3, 4,8), (3,5,7), (4,5,6). Karenin merkezindeki sayı bu üçlülerden en az dördünde bulunmalı (Bir satır, bir sütun, iki köşegen). Bu özelliğe sahip tek sayı ise 5'tir. Sol üst köşedeki sayı 2,4,6 veya 8 olabilir. (Neden?) Bu sayıları sırayla yazarsak herbiri için iki farklı seçenek olduğunu görürüz. Dolayısıyla 3x3 kare için 8 tane farklı sihirli kare vardır.

Karelerin dereceleri arttıkça daha fazla sayıda sihirli kare elde edebiliriz. Daha büyük derecelerde döndürme ve yansıma gibi işlemlerden farklı işlemlerle de yeni sihirli kareler elde edilebilir. Örneğin bir sihirli karede $1 \leq i \leq n$ olmak üzere önce i ve n+1-i numaralı satırlar daha sonra da aynı numaralı sütunlar yer değiştirilirse kare sihrini kaybetmez. (Neden?)

18	12	5	6	24
14	8	21	2	20
1	25	13	19	7
10	4	17	23	11
22	16	9	15	3

18	24	5	6	12
22	3	9	15	16
1	7	13	19	25
10	11	17	23	4
14	20	21	2	8

Yukarıdaki kareler döndürme ya da yansıtma işlemleriyle birbirlerinden elde edilemezler. Ancak birinci kare için i=2 alındığında ikinci kare elde edilebilir.

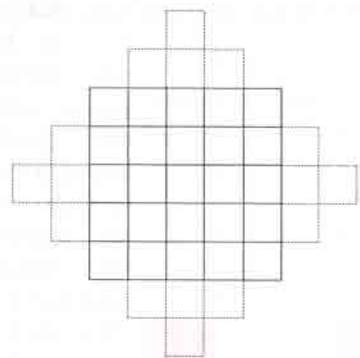
Sihirli karelerle ilgili başka bir soru ise verilen bir derecede sihirli kare oluşturma sorusudur. 1, 3 ve 5. dereceden sihirli kareleri gördük. 4. dereceden sihirli kare ise şöyledir:

1	12	7	14
8	13	2	11
10	3	16	5
15	6	9	4

Matematikçiler belli örneklerden çok genellemelerle ilgilenirler. Bunun için sihirli karelerde de, genel bir sihirli kare elde etme yöntemi üzerine çalışmışlardır. Tarihte ilk olarak basılı bir eserde sihirli kare elde etme yöntemi Murai Chuzen tarafından Sampo Dashiman adlı eserinde 1781 yılında verilmiştir. Chuzen eserinde tek dereceli sihirli kareler elde etmek için bir yöntem önermiştir.

Tek dereceli sihirli kareler için birçok farklı yöntem geliştirilmiştir. Biz burada diğerlerine göre daha basit ve açık olan ve Piramit yöntemi olarak bilinen yöntemi inceleyeceğiz.

Yöntemi 5x5'lik kare üzerinde gösterelim. Önce karenin her kenarı üzerine, dışa doğru şekilde gösterildiği gibi piramitler çizelim.



Daha sonra 1'den 25'e kadar olan sayıları, en soldaki kareden başlayarak çapraz şekilde yerleştirelim.

				5				
			4		10			
		3		9		15		
	2		8		14		20	
1		7		13		19		25
	6		12		18		24	
		11		17		23		
			16		22			
				21				

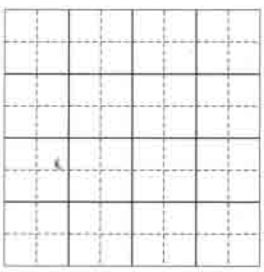
Daha sonra karenin dışında kalan sayıları karenin içine doğru 5 kare kaydırarak oradaki boş kareye yazalım. Sonuçta aşağıdaki sihirli kareyi elde ederiz.

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

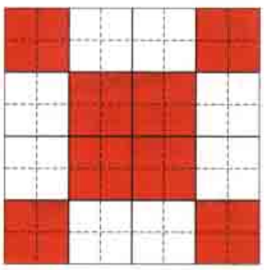
Genel durumda ise dışarıda kalanları n kare kaydırırız. Böylece her tek sayı için bir sihirli kare elde ederiz.

n çift olduğunda n. dereceden sihirli kare elde etmekse çok daha karmaşıktır. Hatta çift dereceli sihirli kare yapmak için genel bir yöntem bugüne kadar geliştirilememiştir. n sayısı dördün katı ise, yani 4,8,12,16.... sayılarından biri ise nxn boyutlarında sihirli kareler elde edilebiliyor ancak n, dörde tam bölünmeyen bir çift sayı ise, yani 6,10,14, 18... sayılarından biri ise n dereceli sihirli kare elde etme yöntemi henüz bulunamamış.

Şimdi dörde tam bölünen n çift sayıları için sihirli kare elde etme yöntemini inceleyelim. n=4m olsun. nxn boyutlarındaki karemizin her kenarını m eşit parçaya bölelim. Böylelikle kareyi 16 tane mxm'lik küçük kareye bölmüş oluruz. Yaptığımız işlemleri örnek olarak 8x8'lik kare üzerinde takip edelim.



Karemizi 16 tane 2x2'lik kareye böldük. Şimdi köşegenler üzerinde kalan kareleri koyu renkle işaretleyelim.



Yandaki şekli elde etmiş olduk. Şimdi sol üst köşeden başlayarak satır satır kareleri numaralayalım ve koyu renkli karelere karşılık gelen sayıları, bu karelerin içine yazalım.

1	2					7	8
9	10					15	16
		19	20	21	22		
		27	28	29	30		
		35	36	37	38		
		43	44	45	46		
49	50					55	56
57	58					63	64

Geriye kalan beyaz kareleri doldurmak için de aynı yöntemi izleyelim. Ancak bu sefer sağ alt köşeden başlıyoruz numaralandırmayı ve koyu kareleri atlıyoruz.

		62	61	60	59		
		54	53	52	51		
48	47					42	41
40	39					34	33
32	31					26	25
24	23					18	17
		14	13	12	11		
		6	5	4	3		

Sonuçta herbiri diğerinin eksik kısımlarını tamamlayan iki adet kare elde etmiş olduk. Bu kareleri üstüste koyarsak aradığımız sihirli kareyi elde ederiz.

1	2	62	61	60	59	7	8
9	10	54	53	52	51	15	16
48	47	19	20	21	22	42	41
40	39	27	28	29	30	34	33
32	31	35	36	37	38	26	25
24	23	43	44	45	46	18	17
49	50	14	13	12	11	55	56
57	58	6	5	4	3	63	64

Diğer çift sayılar için bir yöntem bulunamadığını daha önce belirtmiştik. 6x6 boyutundaki sihirli kareyi örnek olarak veriyoruz.

1	34	33	32	9	2
30	11	25	24	14	7
29	22	16	17	19	8
10	18	20	21	15	27
6	23	13	12	26	31
35	3	4	5	28	36

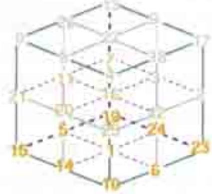
Genel bir yöntem bulmayı da okuyucuya bırakıyoruz. Şimdiye kadar bulunamamış bir yöntemi bulmak gözünüze imkânsız görünebilir ama unutmamak gerekir ki matematikte amatörler tarafından bulunmuş yöntemlerin sayısı hiç de az değildir.

Sihirli karelerle ilgisi olan ve matematikçilerin ilgilendiği başka konular da vardır. Bunlar arasında ayrıtları ya da yüzeyleri üzerinde bulunan sayıların toplamı sabit olan sihirli küpler, çapları toplamı sabit olan sihirli daireler, elemanları asal sayılar olan asal sihirli kareler ya da sihirli yıldızlar sayılabilir.

17	89	71
113	59	5
47	29	101

Elemanları asal sayılar olan üçüncü dereceden sihirli kare.

İkili sihirli karelerse şu özelliği sağlarlar: sihirli karenin her elemanın karesi alındığında yine bir sihirli kare elde edilir. İnanılmaz gelebilir ama bu koşulu sağlayan kareler var. Bunu bir örnek bulmak da sizlere kalmış.



Yüzeyleri toplamı eşit olan 3x3x3'lük sihirli küp

Bir de sihirli kare rekorları var ki insanın hayrete düşmemesi olanaksız. Amaç en büyük boyutlardaki sihirli kareyi oluşturabilmek ve asıl önemli olan bu kareyi kağıtlar üzerine çıkartıp bu kağıtları birleştirerek tek parça olarak ortaya koyabilmek. Şu anda rekor 3001x3001 boyutlarındaki kare ile Kanadalı Lavis Caya'nın, Caya rekoru 1994 yılında kırmış. Alman Christien Schaller'in 1988 yılında yaptığı 1000x1000 boyutlarındaki sihirli kare de yapılmış en büyük çift dereceli sihirli kare olması açısından dikkâte değer. Bu rekorlar bilgisayar çıktısı olarak elde edilenleri. Elle sihirli kare elde etme rekoru ise 1990 yılında Alman Norbert Behnke tarafından 1111x1111 boyutlu kare ile kırılmış.

Görüldüğü gibi uzun yıllar boyu büyücülerin, kâhinlerin tekelinde kalan sihirli kareler matematikçilerin ilgi alanına girdikten sonra çok farklı bir boyut kazanmıştır. Bugün bile, çoğu amatör olmak üzere, birçok matematikçi sihirli karelerle ilgilenmekte ve bu konuda çalışmalar yapmaktadır. Umarız birgün bir Türk matematikçisinin adı da sihirli karelerle anılır. Kimbilir belki de bir rekorla.

Deniz Gündüz

Kaynaklar

Doğanaksoy, Ali, *Sihirli Kareler*, Matematik Dünyası, Nisan 1991, Sayı 2

Nesin, Ali, Matematik ve Korku, Düşün Yay., İstanbul, 1995

Pappas, Theoni, Yaşayan Matematik, Sarmal Yay., İstanbul, 1993

http://home.ust.hk/~philipl/magic

http://www.pse.che.tohoku.ac.jp/~msuzuki

http://www.imn.htwk-leipzig.de