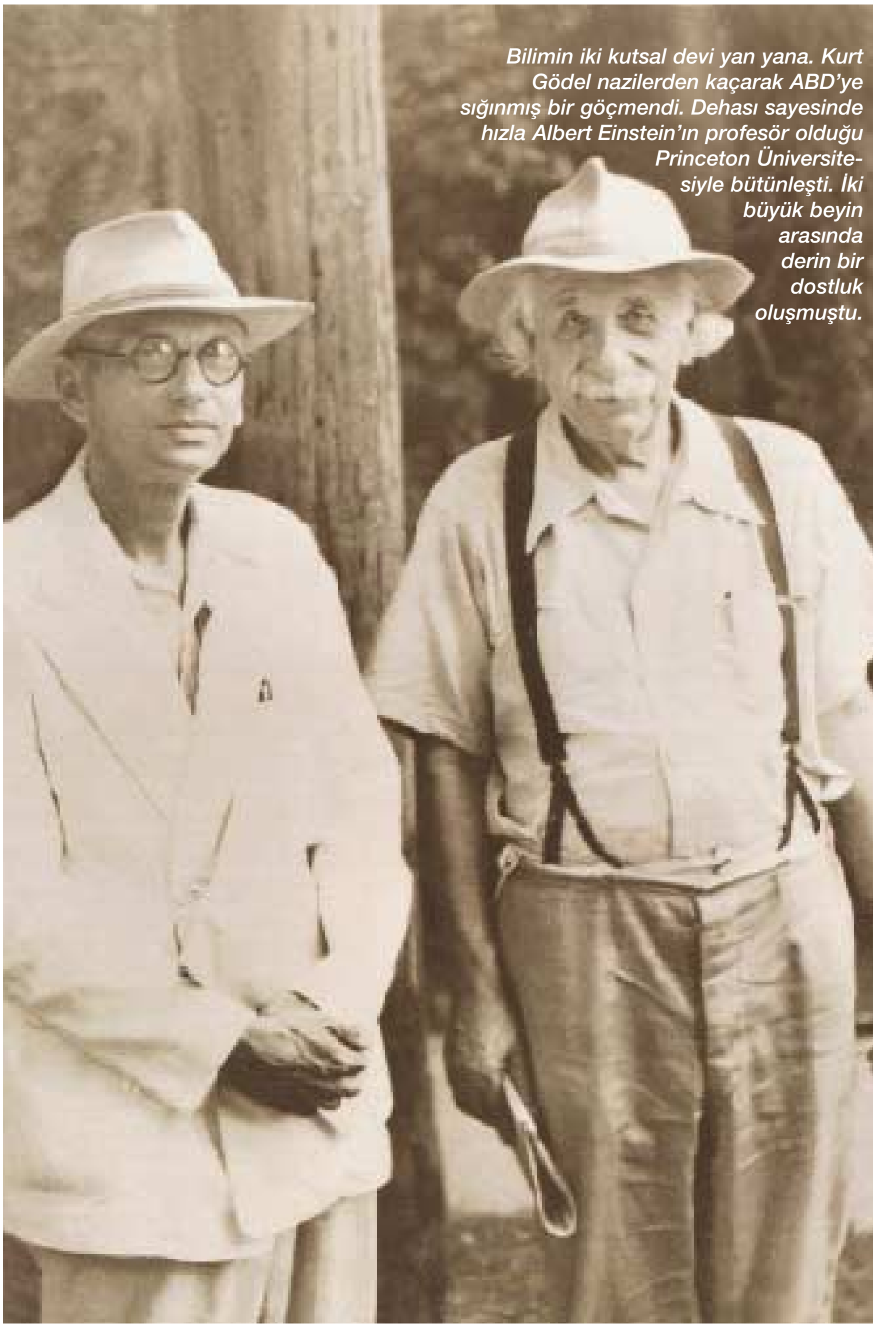
Matematikte Gösterilemeyen Gerçekler

Gödel Paradoksu

Her şey, 1900 yılında matematikçiler arasında akademik bir tartışmayla başladı. İngiliz mantıkçısı ve 1950 Nobel edebiyat ödülü sahibi Bertrand Russell (1872-1970), barutu ilk ateşleyen oldu. Russell paradoksu şundan ibarettir: Bir editör, kendi adını içermeyen bütün katalogların kataloğunu yapmak istiyor.

Kendi adını içermeyen kataloglara bir örnek verelim. Örneğin elimizde bir "Fransız Şarapları Kataloğu" olsun. Bu kitap, şarap olmadığından kendi adını içermeyecektir. Buna karşı bir "Kitaplar Kataloğu" kendi adını da içermelidir; çünkü kendisi de bir kitaptır. Yukarda sözünü ettiğimiz editör, bir "Kitaplar Kataloğu" oluşturmak peşinde değil. O, Kendi Adını İçermeyen Katalogların Kataloğunu yapmak istiyor. Russell Paradoksu şundan ibaret: Kendi Adını İçermeyen Katalogların Kataloğu, kendi adını içermeli midir?



Bilimin iki kutsal devi yan yana. Kurt Gödel nazilerden kaçarak ABD'ye sığınmış bir göçmendi. Dehası sayesinde hızla Albert Einstein'ın profesör olduğu Princeton Üniversitesiyle bütünleşti. İki büyük beyin arasında derin bir dostluk oluşmuştu.

Bu katalog, kendi adını içerirse, kendi adını içeren kataloglar grubuna girer; oysa bu, Kendi Adını İçermeyen Katalogların Kataloğudur; demek ki bu katalog kendi adını içeremez. Fakat bu katalog kendi adını içermezse, kendi adını içermeyen kataloglar grubuna ait olur ki o zaman da kendi adını içermesi gerekir. Bu, açıkca bir paradokstur; çünkü mantık "Kendi Adını İçermeyen Katalogların Kataloğu'nun hem kendi adını içermesini, hem de içermemesini emretmektedir. İki doğru olamayacağına göre burada paradoks vardır.

Russell Paradoksu ünlü Giritli paradoksuna benzemektedir. Bir Giritli "ben hep yalan söylerim" diyor. Giritli gerçekten yalancıysa, bu söylediği de yalandır; yani aslında hiç yalan söylememektedir; bir başka deyişle doğrucudur. Fakat Giritli doğrucuysa bu son söylediği de doğrudur; yani aslında o bir yalancıdır. Mantık bize Giritliyi doğrucu kabul edersek onun yalancı, yalancı kabul edersek doğrucu olması gerektiğini emrediyor. Demek ki Giritlinin yalancı mı, doğrucu mu olduğuna karar veremiyoruz. Bu tam bir paradokstur; çünkü birbirine karşıt iki yanıt da doğru sonuç veriyor, oysa gerçek tektir; Giritli hem yalancı, hem de doğrucu olamaz.

Russell paradoksu neden matematik tarihindeki en büyük bunalımlardan birini başlattı? Çünkü bu paradoks, kümeler kuramına dayanmaktadır. Bir katalog, elemanlar içeren bir küme olarak düşünülebilir. "Kendi Adını İçermeyen Katalogların Kataloğu", küme kuramında şöyle ifade edilir: "Eleman olarak kendini içermeyen bütün kümelerin kümesi" (Russell bu paradoksu böyle ifade etmişti).

Kümeler kuramını İtalyan matematikçisi Guisseppe Peano (1858-1932) öne sürmüştü. Bu kuram Antikite'den bu yana elde edilmiş bir çok matematiksel sonucu birleştiriyor ve düzene koyuyordu. "Kuram"a el konmuş olduğu düşünülüyordu. Ama işe bakın ki bu düzenleyicinin (küme kuramının) kendisi, düzen yerine paradoks yaratabiliyordu. Paradoks bir matematikçi için karabasandır. Matematik tek doğru yanıt ister.

Ortaya iki seçenek çıkıyordu: Ya matematik binasının tamamı çökecekti, ya da bir yerde bir yanlış saklanıyordu; onu ortaya çıkarmak ve düzeltmek gerekecekti. Bu yüzyıl başlarının en büyük matematikçilerinden biri olan Alman David Hilbert (1862-1943), Fransız matematikçisi Henri Poincaré ile birlikte "matematiğin temellerine" doğru bir yarış başlattılar.

Bu basit bir iş değildi. Hilbert "Program"ında bu araştırmanın planını çizmişti: "Anlamlarından soyutlanmış matematik sembolleri birbirine bağlayan bağların tutarlı ve çelişkisiz olduğunu göstermek". Böylece Hilbert "meta-matematik"i başlattı. Meta-matematik, matematik konularının değil, matematiğin kendisinin incelenmesi olacaktı.

Hilbert'in Program'ı bir tartışma başlattı. Hilbert, ilk ve son defa, matematiği "mekanik" bir şekilde ifade etmek için gerekli mantık kurallarını bulmak istiyordu. Bu başarılabilirse, matematiğin bütün sonuçları bu kurallar "körü-körüne" uygulanarak elde edilebilecekti. Modern terimlerle ifade edersek Hilbert'in programı bütün matematik teoremlerini bir bilgisayar tuşuna basarak elde etmek anlamına geliyordu. Bu mutlaka matematiği daha sağlıklı kılacaktı; fakat onu sonsuza dek kısırlaştırmak pahasına!

Ne var ki Programı'ının başarısına bir mantık kuralı engeldi. Örneğin dil uzmanları, gramer kurallarının temellerini oluşturmak isterken, sözcüklerin anlamını dışlasalardı kendilerini bir paradoks içinde bulurlardı. Gramerin temelini oluşturmak için hem sözcüklerin anlamına (anlambilim),

Paradoksun resmi: Ünlü Hollandalı matematikçi ressam Maurits Cornelis Escher tarafından çizilen ünlü Çizen El gravürü. Bu gravür "kendini kaynak gösterme" (otoreferans) çelişkisini ifade ediyor. B eli, A elini çiziyorsa, A eli B elini çizemez. "Gödel teoremi" benzer bir kavrama dayanmaktadır.

hem de gramer kurallarına (sözdizimi) gerek vardır. Kısacası burada bir kısır döngü söz konusudur. Bundan kurtulmak için önce birkaç sözcüğün anlamını ve "çok açıkça belli" bazı gramer kurallarını önceden kabul etmek gerekir.

Gödel teoremi, mantık tarihinin en önemli kilometre taşlarından biri oldu. Resimde Gödel, 1972'de kendisine Rockefeller Üniversitesince verilen onursal (honoris causa) doktorluk kıyafeti içinde görülüyor.

Hilbert oyunun kurallarını koydu: Sağlam bir mantığın temelleri olarak tamsayılar ve onların elemanter özellikleri, örneğin 1+1= 2 alınabilirdi. Hilbert basit mantık kuralları kullandı; açıkça belli matematik kavramlardan (bunlara "gerçek matematik" diyordu) aşağıdaki sonuca vardı: "Doğru matematik sonuçların hepsine gerçek matematikten yola çıkarak varılabilir" (Aslında burada aritmetik yüceltiliyordu).

Hilbert mantık kurallarını gerçek matematiğe uygulamak istiyordu. Örneğin "İnsanlar ölümlüdür. Sokrat da insandır. O halde Sokrat da ölümlüdür" önermesi Hilbert'e göre 2x3= 6 tipinden basit bir işleme eşdeğerdir. Böyle bir sistemin kurulmasındaki zorluk, mantık önermeleriyle sayısal işlemler arasında bir yakınlık gerektirmesiydi. Örneğin m ve n gibi iki mantık önermesinin sonucu mxn=p olmalıydı. Bunun olabileceğini, o zaman 25 yaşında olan matematikçi Kurt Gödel gösterdi: Her türlü mantık önermeleri, Gödel sayıları denen (bunlar asal sayılar ve onların kuvvetleriydi) sayıların basit işlemleriyle gösterilebilirdi.

Mantıkta her önerme ya yanlış ya da doğrudur. Örneğin A önermesi "insan bir ağaçtır" yanlıştır; bunun karşıtı anti-A ise doğrudur: "İnsan bir ağaç değildir". Bu özelliğe dayanarak Gödel, G önermesini yaptı: "Öyle bir A önermesi bulunabilir ki ne A, ne de A'nın karşıtı (anti-A) doğrudur". (Russell ve Giritli paradoksları gibi). Sonra G önermesine karşılık olan sayıyı hesapladı; bu sayının iki tam sayının çarpımı olduğunu gösterdi. Böylece bomba patlamış oldu: Matematikte daima gösterilemeyen gerçekler olacaktı. Modern terimlerle söylersek bir bilgisayara hayal edilebilecek bütün matematik kuralları verilse bile, bilgisayar bazı problemleri asla çözemeyecektir (1936'da İngiliz matematikçisi Alan Turing, Gödel'in buluşunu genelleştirdi. Turing şunu gösterdi:

"Principia Matematica" adlı 3 ciltlik dev matematiksel mantık kitabının yazarı İngiliz matematikçi filozofu Bertrand Russell, kümeler kuramında bir mantık paradoksu tanımlayarak matematikte bir bunalım oluşturdu. Bu bunalım, Gödel'in mantıkta "ne doğru, ne de yanlış" sayılabilecek kavramlar olduğunu göstermesiyle derinleşti.

bir bilgisayar, kanıtlanamayacak bir matematiksel gerçekle karşılaşırsa, sonsuza dek çalışır, durmaz). David Hilbert, Gödel'in 1931'de yayımlanan çalışmalarıyla o kadar yıpranmıştı ki hayatının kalan bölümünü Gödel'in yanıldığını kanıtlamaya çalışmakla geçirdi. Hilbert, Gödel'in sarstığı tek kişi değildi. Gödel, görüşlerini 1930 Eylül'ünde, Turing'le birlikte ileride bilgisayarı bulan John von Neumann'a anlatmıştı. O gün von Neumann mantığı terk etmeye karar verdi.

"Gödel teoremi" yavaş yavaş kendini kabul ettirdi ve matematiğin sınırlarını aştı. Gödel şunu kanıtladı: "Bir dilin tam tanımı, aynı dilde yapılamaz; çünkü bu yolla bir cümlenin doğruluğu tanımlanamaz". Matematik, filoloji ve felsefeye açılıyordu.

Bazı yorumcular bu teoremi metafiziğe uygulamak istediler; hiçbir sistem gerçeği yakalamıyor; akıl, bilinç ve ruh, insan tarafından algılanamıyordu. Yalnız dünya dışı güçler gerçeğe erişebilirdi. Aynı kural psikolojide de uygulandı: İnsan çözümsüz bir problemle (ya da bir paradoksla) karşılaştığı zaman şizofrenik bir davranış gösterir ve bu durumdan ancak tedavi edilerek çıkabilir. Bu kuram ABD'de "Palo Alto ekolü"nce bazı akıl hastalıklarının tedavisinde kullanılmaktadır. (Şizofrenlerde karşıt değerlilik-ambivalens-denen bir belirti vardır; bu, bir şizofrenin birbirinin karşıtı olan durumların ikisini de doğru kabul edebilmesidir. Bir şizofren bir şeyi hem var, hem yok, bir canlıyı hem yaşar, hem ölü; bir insanı hem dost, hem düşman vb. kabul edebilir. Görüşlerinde hem modern, hem de tutucu olabilir. Şizofreni mantığına göre Russell ve Giritli problemleri bir paradoks oluşturmaz).

$$\mathrm{Cons}(k) \rightarrow \mathrm{Dem}_k(17\ \mathrm{Gen}\ r)$$
$$\mathrm{Cons}(k) \rightarrow (x)Q(x, p)$$

Gödel teoremi (yukarıda formülleri görülüyor) Alman matematikçisi David Hilbert'in (1862-1943) (üstte sağda) matematiğin "temellerini" bulma çabalarını sıfıra indirgedi. Gödel teoreminin kurbanlarından biri de bilgisayarı bulan Macar asıllı Amerikan matematikçisi John von Neumann oldu; von Neumann, Gödel teoreminden o kadar etkilendi ki mantık çalışmalarını terketti.

Viyana valsi:Kurt Gödel Avusturya'dan ABD'e kaçmadan az önce Adèle Porkert ile evlendi. Eşi de onunla birlikte Amerika'ya kaçtı ve Kurt'un ölümünden üç yıl sonra hayata veda etti.

Aslında Gödel teoremi böyle bir genellemeye elverişli değildir; o, yalnız klasik gerekirci mekanik kurallarına göre çalışan makinelere uygulanabilir. Bu teoremin insan ruhunun problemlerini yanıtlamaktan uzak olduğu kesinse de içeriği o kadar zengindir ki uygulamaları giderek daha yaygınlaşmaya başlamıştır.

Başlangıçta matematikçilerin çoğu, bu kadar garip ve soyut bir sonucu küçümsediler. Fakat yavaş yavaş orada burada çözümsüz problemler ortaya çıkmaya başladı. İşte çözümsüz problemlerden biri daha: "bir düzlemin döşenmesi". Elinizde değişik geometrik şekillerde (kare, eşkenar dörtgen...) bir yığın kağıt parçası olsun; ardarda rastgele şekiller alarak, delik ve örtüşme oluşturmadan düzlemi tamamen döşeyebilir misiniz?

Bu problem matematikle çözülemez. Gerçek şudur ki parçaların şekillerini içeren bir algoritma (bir enformatik programı), size "bunlarla bir düzlem deliksiz ve örtüşmesiz döşenebilir veya döşenemez" diyemez. Fizik gibi matematik de özel olgulardan çok, genel kurallarla ilgilendiğinden, "karar verilemez" durumlarla ilgilenmeye başladı.

Bir diğer "karar verilemez" durum enformatiğe aittir; fakat insanlara da uygulanabilir. Bu, diğerlerinden de zordur: "bir enformatik (bilgisayar) programının asla hiçbir şeye yaramayan ve bir sonuca varamayacak komutlardan oluşup oluşmadığını önceden (a priori) belirleyebilecek hiçbir yöntem yoktur". İnsan genomundaki baz sırasını belirleme çalışmaları- bu yüzyıl sonlarının en önemli projelerinden biri- bu matematiksel olanaksızlık duvarına çarpmaktadır. Bir gün genlerin şifresi çözülse bile, genetikçiler, görünüşte bir işe yaramayan genom baz sırasını bulmak için bilgisayarların gücünü kullanamayacaklardır; çünkü hiçbir bilgisayar programı asla bütün genlere uygulanamaz.

Daha da karmaşık olan bir problem "hayat oyunu"dur. 1960'lı yıllarda Amerikan matematikçisi John Conway'in bulduğu bu oyunda bir satranç tahtası üzerinde rasgele bir sayıda piyonlar vardır. Oyun iki kurala göre oynanır: Birinci kural: Eğer boş bir kare, üç piyonla çevriliyse gelecek hamle oraya bir piyon konulabilir. İkinci kural: Bir piyonun komşusu olan piyonların sayısı ikiden azsa ya da üçten fazlaysa o piyon tahtadan çıkartılır.

İlginçtir ki 1970'lerde bu oyunun sonucunun "karar verilemez" cinsten olduğu kanıtlandı. Bir başka deyişle, başlangıçtaki piyon dağılımı ne olursa olsun, bütün piyonların tahtadan kaldırılacağı mı (sonuçta boş tahta), yoksa oyunun sonsuza kadar devam edeceği mi (tahta üzerinde her zaman piyonlar bulunması) önceden söylenemez. (Hayat oyununun ayrıntıları için bkz. Matematiğin Gizli Dünyası, David Wells, çev. Selçuk Alsan, Sarmal Yayınevi 1996).

Bu oyun piyon içeren birimlerin biçimlerini (daire, kare, üçgen vb) ya da piyonlar arasındaki rekabet kurallarını değiştirerek daha karmaşık hale getirilebilir. Bunlarla "karar verilemezlik" daha da artar. Bu oyuna bakarak hayvan türlerinin (insan dahil) evrimi belirlenmek istenirse bu simülasyon (taklit) söz konusu türlerin yok mu olacağı, devam mı edeceği konusunda bizi aydınlatamaz. Bu problem bilgisayara verilirse sonsuza dek beklemek gerekir.

Science et Vie, Nisan 1997

Çeviri: Selçuk Alsan