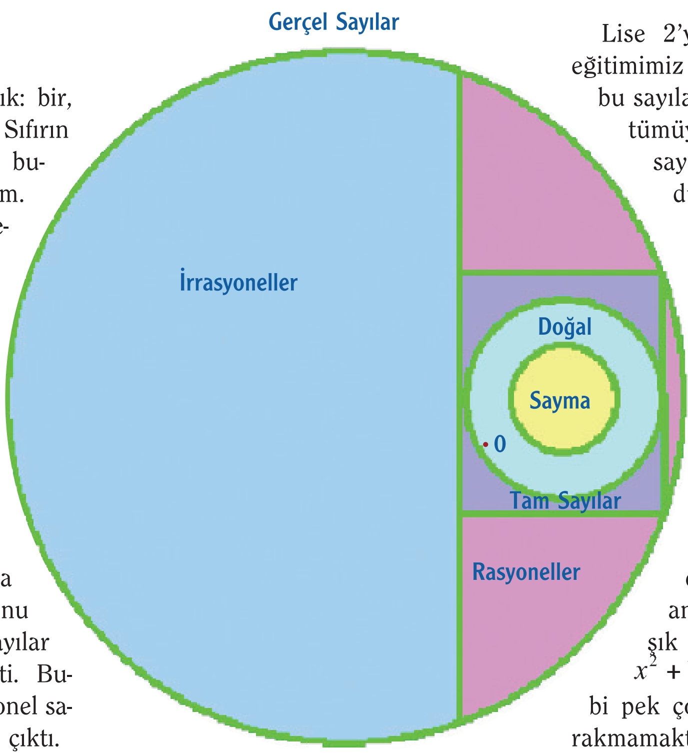
UÇSUZ BUCAKSIZ SAYILAR KÜMESİNE DEĞİŞİK BİR SINIFLANDIRMA:

CEBİRSEL VE AŞKIN SAYILAR

Birkaç dahiyi istisnadan sayarsak matematik eğitimi herkes için sayı saymakla başlar diyebiliriz. Sayılar, genellikle okul öncesi çağda ezberlenir. Yeni bir dil öğrenmeye başlanıldığında ilk birkaç dersten biri sayılara ayrılır. Matematik denince akla ilk sayılar gelir ve hatta pek çoğumuza göre matematik sadece sayıların etrafında dönmektedir. Matematiksel bir kuram üzerine yazılmış bir kitabın sayfalarını çevirmek bile matematiğin sadece sayıların etrafında dönmediğini farketmenize yardımcı olacaktır. Ama şu da yadsınamaz bir gerçek ki, sayılar, matematiğin önemli bir parçası ve sadece matematikçilerin değil, tüm insanlığın ilgisini çeken çok özel bir konu. Yalnızca asal sayılara olan ilgi bile bu fikri desteklemeye yeterli.

Bir iki üç

Saymaya önce 1'den başladık: bir, iki, üç... Kim sıfırdan başlar ki? Sıfırın sayma sayılarından çok sonra bulunmasına şaşırmamak lazım. Sonsuza uzayıp giden bu kümeye 'sayma sayıları' adını verdikten sonra sıfırı da ekleyerek 'doğal sayılar' kümesini oluşturduk. Tabii bu küme de insanoğlunun ihtiyaçlarını karşılamaya yetmedi. Fazlasını düşündüğümüz kadar eksiğini de düşünmemiz gerektiğinden, sıfırın öncesini yani negatif sayıları da kümemize ekledik. Oluşan kümenin adını da 'tamsayılar kümesi' koyduk. Sonu gelmeyen istek ve ihtiyaçlar sayılar kümesini alabildiğine genişletti. Buçuklular, çeyrekler derken rasyonel sayılar da bir gün tarih sahnesine çıktı.



Pisagorcular ve İrrasyoneller

Aksi ispatlanıncaya dek bütün sayıların rasyonel olduğu, yani m ve n (n sıfırdan farklı) birer tam sayı olmak üzere, m/n şeklinde yazılabildiği zannedilmiş. Bu fikri özellikle güçlü bir şekilde savunan Pisagor, tüm sayıların rasyonel olduğunu mantık yoluyla ispatlamaya çalışmışsa da başarılı olamamış. Dik kenarları 1 olan ikizkenar dik üçgene pisagor teoremi uygulanınca elde edilen (hipotenüs uzunluğu) $\sqrt{2}$, pisagor okulu öğrencilerinin şüphelenmesine neden olmuş. Hikayeye göre Pisagorculardan Hippasus bu sayıyı m/n şeklinde ifade etmeye çalışırken asla öyle iki m ve n tamsayısı bulunamayacağını, yani sayının rasyonel olmadığını ispatlamış. Bu çalışması Hippasus'a pahalıya mal olmuş, çünkü irrasyonel sayıların varlığını bir türlü kabullenemeyen Pisagor, bu durumun fazla yayılmaması için Hippasus'un denizde boğularak öldürülmesi emrini vermiş. Tahmin edileceği üzere kısa vadeli bu çözüm irrasyonellerin varlığının yayılmasına engel olmaya yetmemiş.

Daha Bitmedi

İrasyonellerle birlikte gerçel (reel) sayılar kümesi tamamlanıyor. Yani bir sayı doğrusu üzerindeki tüm noktalara bir isim veriyoruz.

Lise 2'ye kadar olan matematik eğitimimiz boyunca karşımıza çıkan bu sayılar, emektar sayı doğrusunu tümüyle örttüğünden, başka bir sayı kümesinin var olduğunu düşünmeye gerek bile duymadık. Yeni bir türün hayal gücümüzün sınırlarını zorlayacağı açıktı. Doğrumuzda tek bir sayıya bile yer kalmamıştı, onları nereye koyabilirdik ki? Neye benziyorlardı ya da hangi amaca hizmet ediyorlardı şeklindeki soruları belki de düşünmeye fırsatımız olmadan kendileriyle bir gün ansızın tanıştırıldık: Karmaşık (kompleks) sayılar. Amaç, $x^2+1=0$ örneğinde olduğu gibi pek çok denklemi çözümsüz bırakmamaktı. Karesi negatif olan hiçbir gerçel sayı olmadığından bu denklem çözümsüz kalıyordu. Matematikçiler, “karesi negatif olan sayı gerçel değilse sanal olmalı” dediler ve İngilizcesi ‘imaginary’ olan sanal kelimesinin baş harfini alarak, karesi -1 olan i sayısını ortaya attılar: $i^2 = -1$. Artık sayı doğrusu tek boyutlu olmaktan çıkmış, iki boyutlu bir uzay şekline dönüşmüştü ve bundan sonra her polinomun mutlaka en az bir kökü olacaktı.

Cebirsel Sayılar

Bu yazımızda yeni bir sayı türünden bahsetmeyeceğiz, ama mevcut sayı kümemizi farklı bir tanım kullanarak sınıflandıracağız. Şu an için elimizdeki bir sayı ya rasyonel ya da irrasyonel; yani sırasıyla ya m/n $(n \neq 0 \ ve \ m,n \in Z)$ şeklinde yazılabiliyor ya da yazılamıyor. Bu yeni sınıflandırma için bir tanım yazalım ve onu sağlayan sayılara yeni bir isim, sağlamayanlara farklı bir isim verelim.

Tam katsayılı bir polinomun $(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0, \ a_i \in Z \ \ 0 \leq i \leq n)$ kökü şeklinde yazılabilen sayılara *cebirsel sayı* denir. Hemen karmaşık sayı i'nin cebirsel olduğunu söyleyebiliriz; ne de olsa kendisinin tanıma uygun $x^2 + 1 = 0$ polinomunun kökü olarak doğduğunu az önce belirttik. Hatta tüm rasyonel sayıların da birer cebirsel sayı olduğu açıkça görülebilir. Her rasyonel sayı tanım gereği m/n şeklinde yazılabilir ve $nx - m = 0$ polinomunun bir köküdür. Burada dikkati çeken bir özellik de, rasyonellerin birinci dereceden bir polinomun kökü olarak yazılabilir olması. Kökü olarak yazılabildiği en küçük katsayılı polinomun derecesi, aynı zamanda cebirsel sayının derecesini belirtir. Bu anlamda derece, ayırt edici bir özelliktir. Örneğin rasyonel sayılar birinci dereceden cebirsel sayılardır. İrrasyonellik özelliğiyle meşhur olan $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ gibi kök içindeki asallar da, ikinci dereceden cebirsel sayılardır. Söz gelimi $\sqrt{2}$, $x^2 - 2 = 0$ polinomunun köküdür; daha küçük katsayılı bir polinomun kökü olarak ifade edilemez. Rasyonel sayıların tamamının ve irrasyonellerin bir kısmının bu kümeye dahil olduğuna tanık olduktan sonra akla gelen en doğal soru şu: cebirsel olmayan sayılar var mı?

Aşkın Sayılar

“Cebirsel olmayan sayılara aşkın sayılar denir” tanımı hazırdı ve işin en kolay kısmıydı. Aşkın sayıların varolduğu da sezilmekteydi. Problemin en zor kısmı, böyle bir sayıyı somut olarak ortaya çıkarmak ‘işte bu bir aşkın sayıdır’ demekti. Bu konuda en büyük şüpheyi üzerlerine çeken iki sayı e ve π olmasına karşın, sürpriz bir şekilde aşkın olduğu ispatlanan ilk sayı onlardan biri değildi. 1844'de Joseph Liouville aşkın sayıların karakteristik özellikleri üzerine verdiği temel bir teoremle Liouville sabiti olarak anılan ve n! inci ondalık basamakta 1, kalan basamaklarda 0 alan şu aşkın sayıyı matematiğe kazandırdı:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = 0{,}110001000000000000000001000\ldots$$

e ve π'nin aşkınlığı sırasıyla 1873'de Charles Hermite ve 1882'de Ferdinand von Lindemann tarafından ispatlandı.

Hangisi Daha Büyük?

Aslında burada akıllara takılması beklenen başka bir soru daha var: Cebirsel sayılar kümesinin mi yoksa aşkın sayılar kümesinin mi eleman sayısı daha fazla? Aşkın sayılara ilişkin örnekler az olduğundan mıdır bilinmez, ilk bakışta bu kümenin daha küçük olduğu düşünülür. Oysa, aşkın sayıların miktarı cebirsel sayılardan daha fazladır. Elimizdeki kümelerin ikisi de sonsuz miktarda eleman içerdiğinden, biri diğerinden *şu kadar* fazla şeklinde bir karşılaştırma beklemeyin. Bu konuya ışık tutan George Cantor'un yaptığı çalışmayı basit bir dille şöyle özetleyebiliriz: Öncelikle gerçel sayıların miktarı tam sayılardan fazladır. Çünkü ilki sayılamayan, ikincisi de sayılabilen bir kümedir. Cebirsel sayılar, sayılabilir bir kümedir çünkü tam katsayılarla oluşturulduğundan tam sayılarla birebir eşlenebilir. Bu da gerçel sayılardan cebirselleri ayırınca geriye kalan aşkın sayılar kümesinin sayılamaz olmasını gerektirir. Aksi takdirde, gerçel sayılar kümesinin sayılabilir olduğu sonucuna varırız; ki, bu da bir çelişkidir.

Başka Aşkın Sayılar

Hakkında çok şey yazdığımız aşkın sayılardan sadece 3 tanesini örnek vermek olmaz! Gerçi matematik dünyası da aşkın sayılar konusunda uzunca bir süre kıtlık çekti ta ki 1934'te Aleksandr Gelfond ve Theodor Schneider isimli matematikçiler Hibert'in 7. problemini birbirinden bağımsız olarak çözmeyi başarana dek:

a; 0 ve 1'den farklı cebirsel bir sayı ve b cebirsel ve irrasyonel bir sayı ise a^b aşkın bir sayıdır

Bu teoremle siz de kendi favori aşkın sayınızı üretebilirsiniz. Örneğin $2^{\sqrt{2}}$ aşkın bir sayıdır çünkü istendiği gibi 2; 0 ve 1'den farklı cebirsel bir sayı, $\sqrt{2}$ de cebirsel ve irrasyonel bir sayıdır. Bu teorem ışığında e^{π}'nin de ünlü Euler formülü kullanılarak aşkın olduğu gösterilebilir:

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \leftrightarrow e^{\pi} = -1^{\frac{1}{i}} \leftrightarrow e^{\pi} = (-1)^{-i}$$

Şimdi e^{π} yerine onun eşitliği olan $(-1)^{-i}$'yi değerlendirebiliriz: -1, 0 ve 1'den farklı cebirsel bir sayı, $-i$ de cebirsel ve irrasyonel bir sayı olduğundan e^{π} aşkın bir sayıdır.

Geriye dönüp şöyle bir bakarsak bu yöntemle tüm sayılardan ziyade, sadece irrasyonel sayıları sınıflandırdığımızı görebiliriz. Çünkü tüm rasyoneller ve bazı irrasyoneller, cebirseldir. Geriye kalan, ama hâlâ çoğunluğu oluşturan irrasyonel sayılar pek çok gizemi içinde barındıran ve sayı kuramcılarının en büyük gözdelerinden biri olan aşkın sayılardır. İki cebirsel sayının toplamı, farkı ya da bölümü de cebirseldir. Ama benzer bir ifadeyi aşkın sayılar için henüz söyleyemiyoruz. Bu nedenle π^e, $\pi.e$ ya da $\pi + e$'nin aşkın olup olmadıkları şimdilik bilinmemekle birlikte daha pek çok bilinmeyeni içinde barındıran aşkın sayıların gelecek yıllarda oldukça ilerleme kaydedeceği bekleniyor.

Nilüfer Karadağ

Bir Buluşum Var

Goldbach Önermesinin İspatı

Bilim ve Teknik Dergisi'ni elimden geldiğince takip etmeye çalışan birisiyim. Bilim ve Teknik Temmuz 2005 sayısını da aldım. Matematiğe meraklı bir genç olduğumdan, matematik ile ilgili kısımları okurum ilk önce dergiden. Ve bu sayıda şöyle bir şeyden bahsetmişsiniz:

"Haziran 1742'de Goldbach, Euler'e yazdığı bir mektupta "2'den büyük her çift sayı, iki asal sayının toplamı şeklinde ifade edilebilir" önermesinin, ya doğru olduğunu ispatlamasını ya da bunu sağlamayan bir örnek göstererek yanlış olduğunu ispatlamasını istemiştir. Bugüne kadar bu ifadenin tersti bir örnek bulan olmadıysa da onu ispatlayan da henüz çıkmadı."

Ben kendi çapımda birşeyler yaptım. Derin bir matematik bilgisine sahip olmadığımdan, bu yaptıklarımı değerlendirmenizi rica ederim.

Saygılarla,

Erdal İmamoğlu

Çift sayı = çift sayı + çift sayı ya da çift sayı = tek sayı + tek sayı

2 hem asal hem de çift sayıdır ve diğer bütün asal sayılar tek sayıdır.

Her çift sayı kendisinden küçük iki tek sayının toplamı biçiminde yazılabilir.

(4=2+2 ve 6=3+3 önermeye uygundur.)

6' dan büyük çift sayılar için,

$$2n = (n - a) + (n + a)$$

n tek ise a çift, n çift ise a tek sayı ve $n>a$, $n>3$

$2n$ sayısından küçük tek sayılar kümesi = $\{n - a^*, n - a'', \ldots, n - a, n + a, \ldots, n + a'', n + a^*\}$

Yani, $2n$ sayısından küçük bütün pozitif tek sayılar bu kümenin birer elemanıdır.

O halde, $2n$ sayısından küçük en az iki tane asal sayı bu kümenin birer elemanıdır.

Ve asal olan her (n-a) sayısına karşılık gelen bir (n+a) sayısı da vardır. Çünkü, bu iki asal sayının aritmetik ortası n sayısıdır.

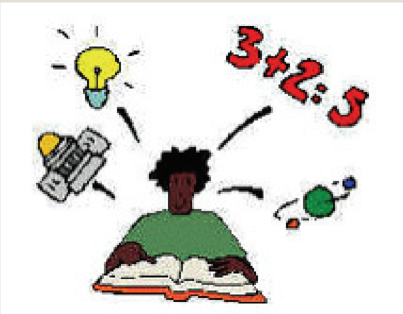
(n-a) ve (n+a) asal sayı, bu asal sayıların artimetik ortası n, bu asal sayıların toplamı $2n$ olur.

(4=2+2, ve 6=3+3 toplamlarının önermeye uygun olduğunu kabul etmiştik)

O halde; 2'den büyük her çift sayı, iki asal sayının toplamı şeklinde ifade edilebilir.

Sayılar kümesine olan ilgiyi uzaklarda aramaya gerek yok! Dergimize gelen mektupları okumak bize yetiyor. Sizlerden gelen pek çok mektup özellikle asal sayılar üzerine yazılmış. Biz, içlerinden birinden gerçek bir buluşun çıkacağına dair umutluyuz. Ama şunu da belirtmekte fayda var ki daha çok çalışmamız gerekiyor. Özellikle matematiksel ispatın nasıl yapıldığına dair, daha çok bilgi edinmeliyiz. Takdir edersiniz ki yöntemini tam olarak öğrenmeden bir problemi çözmeye çalışmak kişiye oldukça zaman kaybettirir. Biz de ileriki yazılarımızdan birini ispat teknikleri konusuna ayırarak sizlere yardımcı olmaya çalışacağımıza dair söz veriyoruz.

Öncelikle Erdal arkadaşımıza çalışmasını bizimle paylaştığı için teşekkür ediyor, matematik alanında çalışmalarını devam ettirmesini tavsiye ediyoruz. Örneğin Fermat'nın son teoremini çözen Andrew Wiles'in sadece bir teoremi ispatlamak için 30 yılını ayırdığını düşünürsek, çalışmanın ve bilgi birikiminin bu işin en önemli anahtarlarından biri olduğunu rahatlıkla farkedebiliriz.



İspat önce kendinizi sonra karşınızdaki insanları, ortaya attığınız tezin doğru olduğuna dair inandırma yöntemidir ve unutmayın, kendinizi gerçekten inandıramazsanız yani içinizde bir şüphe dahi kalırsa karşınızdakini inandırmanız pek mümkün olmayacaktır. Erdal arkadaşımız yaptığı ispatta okuyucularımızın genelde düştüğü hataya düşmüş, ispatlayacağı ifadeyi doğru olarak kabul etmiş. Aslında bu, sık yapılan genel bir hata. İspatlar bazen öyle içinden çıkılmaz bir hal alıyor ki önermenizi doğru kabul edip devam ettiğinizin farkına bile varmıyorsunuz.

$$2n = (n - a) + (n + a)$$

$2n$ sayısından küçük tek sayılar kümesine bir örnekle bakalım:

16 için bu küme: {1,3,5,7,9,11,13,15} şeklinde olacaktır. Burada istendiği gibi 1+15, 3+13, 5+11, 7+9 hep 16'yı veriyor. Erdal arkadaşımız buradan sonra ispata:

"O halde, 2n sayısından küçük en az iki tane asal sayı bu kümenin birer elemanıdır.

Ve asal olan her (n-a) sayısına karşılık gelen bir (n+a) sayısı da vardır" diyerek devam etmiş ama $2n$'i ya da 16'yı oluşturmak için topladığı iki sayının sadece tek sayı olduğunu belirtmiş, onların asal olduğuna ilişkin bir çalışma yapmamış. Birisinin asal olduğu kesin olsa bile, toplanan diğer sayının da asal olduğuna dair elde kesin bir bulgu yok. Bu da doğruluğunu göstereceği ifadeyi doğru kabul etmesi anlamına geldiği için, ispatın çöktüğü nokta oluyor.

Bazen bir ifade çok inandırıcı gözükebilir. Matematikçi olmanın yolu biraz şüpheci olmaktan geçiyor. Her duyduğunuza, gördüğünüze inanmayın ve satır aralarını okumak için kendinize fırsat tanıyın. İşte o zaman matematiğin insan beynine sağladığı olanaklardan faydalanma şansı bulabilir, hayatta karşılaştığınız pek çok problemi doğru ya da en azından uzun vadeli olarak çözebilirziniz.

Nilüfer Karadağ
karadagnilufer@yahoo.com

Eğer siz de kaydettiğiniz önemli bir bulgu olduğunu düşünüyorsanız dergimize gönderin ve onu sizin için değerlendirelim. Adresimiz:

**TÜBİTAK Bilim ve Teknik Dergisi,
Buluşumu Değerlendirin Köşesi,
Atatürk Bulvarı No:221
Kavaklıdere-ANKARA**