

ki yüzyılların Huygens, Leibniz, Newton, Gauss, MacLaurin, Steiner ve daha yüzlercesi bu üç probleme çeşitli kollardan hücum etmişler, fakat kaleyi fethedememişlerdir. Karşılarındaki tek ve yüzyıllar boyu yıkılmayan duvar Plato Kuralı idi.

Adı geçen devlerin her biri, bu kurala uymaktan vazgeçtiği zaman, önlerinde yepyeni bir dünya açılacağını biliyorlar, seziyorlardı. Ve, öyle yaptılar...

Bu bir türlü yenilmez Plato Kuralı'nın matematik dilince anlamı ne idi ki, yüzyıllar süren inanılmaz direnci gösterebiliyordu? Bu sorunun yanıtı, on dokuzuncu yüzyılın hemen başından beri, alcebric analizin yeterince gelişmesi ile verilmiştir artık. Okuyucuyu uzun ve ürkütücü formüller, matematik ifadelerden uzak tutarak, kısaca söylemek gerekirse, Plato Kuralı, yani sadece pergel ve düz cetvel kullanmak zorunluluğu, verilen geometri problemini ancak, kökleri pozitif olarak bulunabilen ikinci derece fonksiyon halinde ifade edebiliyorsak, geçerlidir diyebiliriz. Bunun dışında pergel ve cetvel, çözüm yolu değildir.

Pergel ve cetvel ile sadece toplama, çıkarma, çarpma, bölme, kare alma ve kare kök bulma işlemleri ile bunların çeşitli kombinasyonları yapılabilir, o kadar. Daha yüksek dereceli fonksiyonlar için yeterli değildir. Ama, bu gerçeğe varmak ve bu yanıtı bulmak bile matematik tarihinin en az yirmi üç yüzyılı almıştır.

İşte bu gerçeğin bilinmediği devirlerdeki büyük araştırmacılar, sırf önsezilerine dayanarak Plato Kuralı'nı bir tarafa itmişler ve yeni araçlar, yeni yollar, kural dışı yeni düzenekler tasarlamışlardır. Bu da matematiğin ufkuyla alabildiğince genişletmiştir. Bunların bazılarını kısaca değineceğiz; ama öncelikle şu tarihin ünlü üçüzlerini, üç çözümsüz problemini inceleyelim.

BİR AÇIYI ÜÇE BÖLME (Trisection)

Bu problemi ilk defa ortaya atanın Hippas olduğunu gördük; ama, çözümü için ilk defa tarifini yapan Arşimet (Archimedes)'tir. Tablo 1 incelendiği zaman, üçe bölünmek üzere verilen açı (Θ)nın, bir dairenin merkezine yerleştirildiği ve açı tabanının da dairenin çapı boyunca uzatıldığı görülür. Bu taban uzunımı üzerinde seçilen bir (B) noktasını, (Θ) açısının ikinci kolunun daireyi kestiği (A) noktasına birleştiren (\overline{BA}) doğrusu, yine aynı daireyi (C) noktasında kesecektir. Şayet bu çizimde (\overline{BC}) doğru parçası dairenin yarıçapına eşit olursa, bir orta okul öğrencisi bile derhal görebilir ki, (\overline{BA}) doğrusunun taban uzunımı ile yaptığı açı, (Θ) açısının üçte biri olur.

Elimizdeki dökümanlara göre bu konstrüksiyon Arşimet'e aittir ve literatüre de (Arşimet Bölümü - Archimedean Division) olarak geçmiştir. İşte, yirmi küsur yüzyıldan beri Plato Kuralı'na bağlı kalarak, aranan ve bir türlü bulunamayan çözüm, bu Arşimet Bölümü'nü gerçekleştirebilmektir.

Görünüşte olağanüstü basit olan bu konstrüksiyonun çizim imkânsızlığı en son 1837 yılında bir doktora tezi niteliğinde P.L.Wantzel tarafından bulundu. Biz burada okuyucuyu bıktırmadan ve uzun formülasyonlardan kaçınarak konuyu kısaca açıklayalım. Merkezi (O) olan dairenin (\overline{OA}) yarıçapının, yani (Θ) açısının ikinci kolunun, taban üzerindeki izdüşümüne (a) ve taban uzunımı üstündeki (\overline{OB}) uzaklığına da (x) dersek, Şekil 1'de hemen görülen benzer dik üçgenlerin kenar oranlarının eşitliği yoluyla, (x) ile (a) arasındaki ilişkiyi $x^3-3x-2a=0$ olarak gösterebiliriz. Bunu bir lise öğrencisi çok kolaylıkla yapabilir. Görüldüğü gibi, bu bir üçüncü derece denklemdir ve içinde (x^2) terimi yoktur; bundan dolayı da genel anlamda bu denklemin rasyonel kökleri olamaz. Bunun da tek manası, Plato Kuralı'na göre bu fonksiyonun çözümü ve çizimi yoktur.

Bir süreden beri $x^3-3x-2a=0$ ifadesine Üç Bölme Denklemi denir.

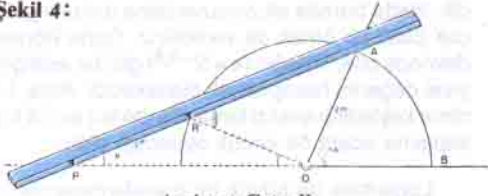
Yalnız hemen söylemeli ki, konstrüksiyonu bu kadar basit, cebrik ifadesi bu derecede kolay olan bu denklemin olumluluk analizi hiç de öyle zannedilmemelidir. Prof.R. C. Yates, kendi kitabında, Wantzel'in analizini kısaltarak bile, ancak on bir sayfede vermiştir.

İşin asıl ilginç yanı, biraz trigonometri ile uğraşan biri, (Cosinus Teoremi)'ni Arşimet bölümüne uygulayarak çok kolaylıkla $4 \cos^3(\Theta) / 3 - 3 \cos(\Theta) / 3 - \cos(\Theta) = 0$ denklemini elde edebilir ki, burada da Cosinus eşdeğerliği karşıtı olan kenar oranlarını yerine koyarsak, yine aynı üçe bölme denklemi ortaya çıkar. Fakat, bu trigonometrik uygulamanın ayrıca ilginç bir yanı vardır. Şayet, ($\Theta = 60^\circ$) alınırsa, $\cos \Theta = 1/2$ olacağından, üçe bölme denkleminin (-2a) terimi, sadece 60° için (-1) olur. Buna göre denklem ($x^3-3x-1=0$)'dir. Burada artık hiç de uzun Wantzel analizlerine lüzum kalmadan hemen söylenilebilir ki, bu denklemin rasyonel kökü olanaksızdır; yani, 60° 'lik açıyı bile, Plato Kuralı'na göre üçe bölmek mümkün değildir.

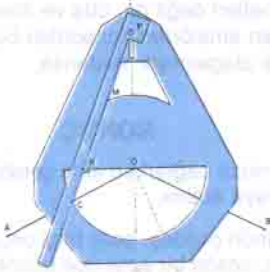
İşte sadece yargıya dayanılarak, bugün bütün matematik ve diğer ilgili kitaplar, pergel ve cetvel ile bir açıyı üçe bölmenin mümkün olamayacağını yazarlar. Hatta, teknik yayıncılar bu noktada o kadar katıdırlar ki, biri çıkıp da olası bir yeni yöntemle üçe bölmeyi imkân dahiline soktuğundan bahseden bir yazı yazsa, yayınlanmasına izin bile vermezler. Euclid Geometrisi gözüyle, bu izleme artık kapanmıştır diye bakılır.

Ama, bu işin sadece bir yönüdür. Olaylar bilim tarihi boyunca başka yönde, hem de çok verimli şekilde gelişmiştir. Biz burada bir iki örnek vererek, çok basit görünen bir problemin, ustalarının elinde nelerelere kadar götürülebildiğini göstermek isteriz (Şekil 3).

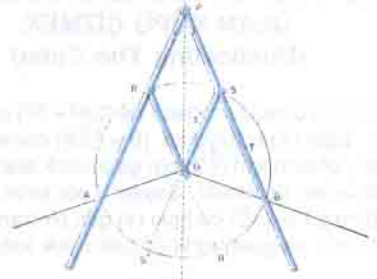
Şekil 4:



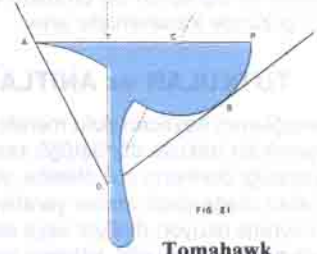
Arşimet Cetveli
(Archimedes)



Amadori Gönyesi



Ceva Pantografı



Tomahawk

İlk defa, Hippias, Quadratrix eğrisini bulmuştur. Bu bir üçüncü derece fonksiyon eğrisidir ve Hippias bununla üçe bölmeyi kesin olarak çözmüştür. Bu gün de Quadratrix, optikte kırılma indeksleri hesaplamalarında çokça kullanılmaktadır. Daha sonraları, Nicodemes, Conchoid eğrisini geliştirmiş, Pappus da bu eğriyi, bir açıyı üçe bölmede kullanmıştır. Conchoid eğrileri, mekanikte dişli çarkların hesaplarında kullanılır. Pappus bununla da kalmamış, kendisinden çok önceleri, Menaechmus tarafından bulunan Konik Kesimlerden Hiperbol eğrisinin, üçe bölmede rahatlıkla kullanılacağını kanıtlamıştır. Çok daha sonraları, 1600'lerde Blaise Pascal, Limaçon eğrilerini bulmuş ve verilebilen her açıyı üçe bölmenin mümkün olduğunu göstermiştir. Özellikle üçe bölmede kullanılan Limaçon'a bu gün Cardioid denir. Modern Analitik Geometri'yi kuran Rene Descartes da yine Konik Kesimlerden Parabol eğrisini olağanüstü bir yolla, açıyı üçe bölmede kullanmıştır. Bu örneklere son olarak Ceva'nın Cycloid eğrisini de katmalıyız. Zira bu cazip çözüm, 1700 tarihlerinde, Arşimet Bölümü'nü tam olarak gerçekleştirmiştir.

Yukarıda adı geçen bütün bu eğriler, üçüncü ve daha yüksek dereceli fonksiyonları temsil edip, genellikle Fonksiyonlar Teorisini geliştirmiştir. Ve dolayısıyla da fizikte genel optiğe, manyetizma ve elektromanyetik titreşimlerin analizine büyük katkısı olmuş, bu sayede de günümüzün en etkin ögesi olan Grup Teorisi'ne yol açmıştır. Böylece bu gün, atom yapısını ve görelilik (relativite) kavramını daha iyi anlayabiliyoruz.

Açının üçe bölünmesi çözümü, yalnız teorik alanda geliştirilmemiş, bu arada mekanik yetenekleri olan

matematik düşünce sahipleri de, çözüme büyük katkılarda bulunmuşlardır. Şekil 4'te geliştirilen bu mekanik araçlardan birkaç tanesi örnek olarak gösterilmiştir. Bunların da tam listesini vermek, tarihsel gerçeklik bakımından emeklerinin hakkıdır. İlk Arşimet Cetveli'dir, üzerinde sadece iki nokta vardır. Hermes Pergeli, Ceva Pantografı, Amadori Gönyesi, Laisant Pergeli, Sylvester İsoklinostat'ı ile kimin tarafından bulunduğu bilinmeyen Tomahawk (Amerikan kızilderililerinin baltasına benzediği için böyle adlanmış denilir) bunlardır.

Ayrıca, problemi çözmek için, uzun yorucu fakat inatçı çalışmalar sonucu, aslında hemen hiçbir matematik temele bağlanamayan, ama, sadece pergel ve düz cetvel kullanan yaklaşımlar (Approximation) da yapılmıştır. Bunların geometrik bir kanıtı olmamakla beraber, çoğu kez şaşırtacak kadar büyük yaklaşma gösterirler. Cusa, Snellius, Karajordanoff, Kopf Perron, Dürer ile özellikle bu gün, gerektiğinde kullanılan D'Ocagne yaklaşımı bunlardandır (Şekil 2).

BİR DAİREYE EŞİT KARE ÇİZMEK (Squaring The Circle)

İkinci çözümsüz problem, yarıçapı belli bir daire alanına eşit bir karenin kenar uzunluğunu, Plato Kuralı ile çizilebilir. Problemin kısaca ifadesi ($\pi r^2 = A^2$)'dir. Veya buna ($A = \sqrt{\pi r}$) diyebiliriz. Burada (A)'yı çizilemek için ($\sqrt{\pi}$)'yi geometrik yolla değerlendirmenin gerektiği ortadadır. Artık bu gün hep bildiğimiz gibi (π) hiçbir cebrik fonksiyonla çözülemeyen 'Transcendental' ve aynı zamanda 'İrrasyonel' bir sayıdır, çizimle gösterilemez. Bundan dolayı da problemin çözümü yoktur denilmiş; böylece de uzun süreden beri unutulmuş gitmiştir.

BİR KUPUN HACMINİN İKİ KATI OLAN KÜPÜ ÇİZMEK (Duplicating The Cube)

Bu çözümsüz problem de ($2A^3 = B^3$) olarak tarif edilir. Eğer (A) biliniyorsa, ($B = \sqrt[3]{2}A$) demektir. Yine aynen, çözüm için ($\sqrt[3]{2}$)'nin geometrik olarak değerlendirilmesi gereklidir. Sayılar Teorisinin bize söylediğine göre, ($\sqrt[3]{2}$) de tıpkı (π) gibi bir transcendental sayıdır ve geometrik çözümü yok kabul edilir.

Kimbilir kaç yüzyıldan beri tükenmez bir gayretle bu çözümlenmesine uğraşılan bu problem de matematikçilerin gözünde kapatılmıştır artık.

TUTKULAR ve ANITLAR

İnsanoğlunun heyecan dolu merakı yetenekleri ile birleşerek bir tutkuya dönüştüğü zaman, etkileri bazen yaşadığı devirlerin çok ötesine, yüzyıllar sonrasına varan olağanüstü anıtlar yaratılıyor. Bunları bu gün hayretle okuyor, dinliyor veya seyrediyoruz. Bir Stradivarius kemanı gibi, kitlelere tesir eden büyük edebî eserler de böyledir. Bir 9.cu Senfoni'ye, bir Süleymaniye'ye ve bir Sistina Capello'ya karşı huşu duyuyoruz. Hatta bugün bile nasıl inşa edildiğine bir türlü akıl erdiremediğimiz Giza Piramitlerinin büyüklüğü bize ürperti veriyor. Daha bunlar gibi yüzlerce sinin bilinçaltı temelinde, olağanüstü bir matematik denge yatar.

Matematik bilimi de bu şahane anıtlardan biridir.

Bu gün artık matematiğin içine girmediği hiçbir alan kalmamıştır. Ama, bizzat matematiğin kendisi baştan aşağı çelişkiler, çatışmalarla doludur da.

TRANSFORMASYONLAR

Bilim adamı olmanın verdiği kendine ve bilgisine güvenmek duygusu, ne yazık ki, çoğu kez tutuculukla, ilham ve önsözlerle değer vermemekle sonuçlanır. Bundan dolayı da kendisine kalfif edilen yeni problemlere yeni çözüm yolları karşısında önce büyük direnç gösterir, bunda belki bir dereceye kadar haklıdır da. Ama, bu tutum, çok defa öyle uzun, o kadar üzüntülü ve kırıcı tartışmalara neden olur ki, taraflar yaşamlarında sonucu göremezler bile. Yavaş yavaş gelişen ve ilerleyen bilim yolu bunlarla doludur.

Bu kalfif edilen 'Yeni Yol', matematik dilinde (Transformasyon) olarak bilinir. Çözümünde güçlük çekilen bir problemi, üzerine oturduğu bazdan kaldırıp, yeni parametreler öneren bir diğer baza transfer etmek anlamını taşır. Örneğin Trigonometri ve transformasyondur, Analitik Geometri de öyle. Matematiğin yürüyüşünde, ilham ve önsöziye dayanan büyük hamlelerdir. Eğer Laplace, Riemann veya Maxwell Transformasyonları olmasaydı, bugün uzay,

zaman ve elektromanyetik radyasyonları çözemezdik. Hatta burada okuyucuya daha anlamlı gelecek çok basit bir örnek de verebiliriz. Daha Rönesans devrinde bile, örneğin ($a = 5^{-3,8}$) gibi bir eşitliğin sayısal değerini hesaplamak olanaksızdı. Ama, Logaritma keşfedilip analizi tamamlandıktan sonra bu hesaplama adeta bir çocuk oyuncağı oldu.

Logaritma da büyük bir transformasyondur.

Ve de, transformasyonları, genellikle, matematiğin katı, tutucu ve şaşmaz yolundan ayırlamayan profesyonelleri değil de, düş ve ilhamlarını bir şair gibi izleyen amatörleri, tesadüfen bulmuşlardır. Bu hep böyle olagelmıştır nedense.

SONUÇ

Sözümüzü bağlarken akla gelebilecek şu sorunu da ortaya atalım.

Bu günün çağdaş, genç bilgi çağı teknik yorumcuları için, acaba bir açığı üçe bölmek veya bir daire alanına eşit kare çizilebilir o kadar önemli midir? Hangi mühendis veya mimar kendi projelerinde buna gereksinim duymuş olabilir? Hemen, hemen hiç...

Ama, böyle düşünmeyen eski kuşak, bu üç problemi ele alarak nerelere varmışlardır görüyoruz.

Tarihe mal olmuş bu çözümsüz üç problemle bugün artık hiçbir profesyonel matematikçi uğraşmaz sanırım; zira, olumsuzluğu akademik olarak kanıtlanmıştır.

Ama, acaba amatörler için öyle mi?

Gönlünde Plato Kuralı'na yer veren ve bu üç probleme çözüm olabilecek yeni ve denenmemiş bir transformasyon arama tutkusu içinde olan amatörlerin hâlâ mevcut olduğuna inanmamız gerekir.

Zira geçmişte o kadar çok örneği var ki...

SİZ OLSAYDINIZ

(Satranç Dünyası'nın çözümleri)

Çözüm I: 1.Kf6! Vg4 (1..gxf7? 2.Axf6) 2.Ff3 Vg5 (2..Vh3 3.Af4) 3.Kf5 Vd8 (3..Vh6 4.Fh5 Şh8 5.Fxf7 Kd8 6.Kh5 Vc6 7.e5 h6 8.e6) 4.Fh5! Ke6 (4..g6 5.Af6) 5.Fxf7 Şh8 6.Kh5! Kc6 7.e5 h6 8.Af6! Kazanır çünkü 8..gxf6 9.Vg6 Fg7 10.Kxh6 Fxh6 11.Vxh6 mat ya da 8..Kxf6 9.e6f6 var (Doment - Kovacevic, Genf 1986).

Çözüm II: 1.Fe6! fx6 2.Vxg6 Şh8 3.Ke4! Vxe1 4.Kxe1 exd5 5.Vf7! b4 6.Ke6 Ka6 7.g4! a4 8.Ke3 kazanır (Tibensky - Kosensky, Budapeşte 1986).

Çözüm III: 1.Ff6! Şh7 2.Kxh6 kazanır (Skripchenko - Filler, Kishonev 1986).